Kolokwium nr 4: środa 2.12.2026, godz. 8:15-9:45, materiał zad. 0–452.

Zadania do omówienia[1] na ćwiczeniach w piątek 20.11.2026, poniedziałek 23.11.2026, piątek 27.11.2026 i poniedziałek 30.11.2026.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Szeregi liczbowe – podstawy[2].

363. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9\,.$$

364. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8\,.$$

365. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1\,.$$

366. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,.$$

Dla podanego przykładu wyznaczyć wartości sum szeregów występujących w powyższym równaniu i sprawdzić, że jest ono spełnione.

367. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = 6\,.$$

368. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \frac{4}{3}\,.$$

[1] Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

[2] Obliczanie sum szeregów geometrycznych, teleskopowych, w tym powstałych z rozkładu na ułamki proste.

369. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 .$$

370. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 5 .$$

371. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 .$$

372. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9} .$$

373. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n} .$$

374. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2} .$$

375. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4} .$$

376. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)} .$$

377. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n} .$$

378. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-4n} .$$

379. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+4)} .$$

Niech

$$a_n = \frac{120}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

380. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ .....

381. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ .....

382. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ .....

383. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ .....

384. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) =$ .....

385. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) =$ .....

386. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+3}^2\right) =$ .....

387. $\sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ .....

388. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ .....

389. $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ .....

Niech

$$a_n = \frac{60}{n(n+1)} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 60.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

390. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ .....

391. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ .....

392. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ .....

393. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ .....

394. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty} a_n =$ .....

395. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^3 - a_{n+1}^3\right) =$ .....

396. $\sum_{n=1}^{\infty} \Big((a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})\Big) =$ .....

397. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) =$ .....

398. $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) =$ .....

399. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + 1600} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 1600}\right) =$ .....

W każdym z poniższych 8 zadań podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

400. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ .....

401. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ .....

402. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+3]{n+3}\right)=$ .....

403. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ .....

404. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ .....

405. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)=$ .....

406. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+2}\right)=$ .....

407. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+3}\right)=$ .....

Niech $a_n=\frac{120}{n(n+2)}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 90.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

408. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+a_{n+1}\right)=$ .....

409. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)=$ .....

410. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ .....

411. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ .....

412. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+3}^2\right)=$ .....

413. $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ .....

414. $\sum_{\mathbf{n=6}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ .....

415. $\sum_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ .....

416. $\sum_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(3^{a_n}-3^{a_{n+1}}\right)=$ .....

417. $\sum_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+1}}\right)=$ .....

Szeregi o wyrazach nieujemnych[3].

Początkowych 8 zadań jest przeznaczonych do samodzielnej analizy – mają podane rozwiązania i będą omawiane na ćwiczeniach tylko na wyraźne życzenie studentów lub wtedy, gdy pozostałe zadania zostaną omówione przed zakończeniem ćwiczeń.

418. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$$

jest zbieżny.

419. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+n}-n\right)$$

jest zbieżny.

420. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}\right).$$

421. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{28^n\cdot(n!)^3}.$$

422. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 18^n}{\binom{3n}{n}\cdot n^n}.$$

423. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{7^n+\binom{2n}{n}^2}}{3^n}$$

jest zbieżny.

424. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2}\cdot n^{n^3}}.$$

[3]Kryteria: porównawcze, d'Alemberta, Cauchy'ego. Pobieżnie również kondensacyjne (zagęszczanie). Ten temat nie występował w poprzednich latach na AM-1, został przeniesiony z AM-2.

425. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$, ... **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, ...

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{n^p+1}}$, ... **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt[5]{n^p+1}}$, ...

---

426. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

Wskazówka: Zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb a_n oraz $\frac{1}{n^2}$.

427. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9\,.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 5 \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 3 \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

428. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leqslant 1\,.$$

429. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 8 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leqslant 64\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant C\,,$$

gdzie $C = 27$ **(wersja łatwiejsza)** lub $C = 16$ **(wersja trudniejsza).**

430. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leqslant 2\,.$$

431. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru k, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^5 + n^k} - \sqrt[4]{n^5} \right)$$

jest zbieżny.

432. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią M, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!}{p^n \cdot (n!)^4}$$

jest zbieżny dla $p > M$ i rozbieżny dla $0 < p < M$.

433. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią M, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot p^n}{\binom{4n}{n} \cdot n^n}$$

jest rozbieżny dla $p > M$ i zbieżny dla $0 < p < M$.

434. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{33^n + \binom{3n}{n}^2}}{6^n}$$

jest zbieżny.

435. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{33^n + \binom{3n}{n}^2}}{7^n}$$

jest zbieżny.

436. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt[3]{n^2}}$$

też jest zbieżny.

437. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

438. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}$$

jest rozbieżny.

439. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k+1}}{n^7+1} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1}+1}}{n^7+1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k, że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów:

440. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ **441.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ **442.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

443. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{110n+10}{110n+11}\right)^n$ **444.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$ **445.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

446. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\cdot\sqrt{4^n+3^n}}$ **447.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$ **448.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}}$

449. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$ **450.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^5-13n^2+1}$ **451.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^6-13n^2+1}$

452. Obliczyć

$$\left[\log_3 \sum_{n=1}^{2^{2024}} \frac{1}{n}\right].$$

Podstawowe kryteria zbieżności szeregów[4].

1. Warunek konieczny zbieżności.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Zbieżność szeregu nie zależy od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. Kryterium porównawcze.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. Kilka wzorcowych szeregów.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a.

5. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 \ ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

[4]Kryteria są sformułowane tak, aby pasowały do szeregów o wyrazach dowolnego znaku. W przypadku szeregów o wyrazach nieujemnych należy zignorować symbole wartości bezwzględnej.

6. Kryterium Cauchy'ego.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \ ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. Kryterium d'Alemberta dla ciągów.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \ ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1 \ ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

8. Kryterium Cauchy'ego dla ciągów.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \, ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 \, ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

9. Kryterium kondensacyjne (zagęszczanie).

Jeżeli ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest nierosnący, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} \ .$$

Inne wersje (dla ambitnych):

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot a_{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot a_{n^3} \ .$$