

Klasówka 13 (piątek) kwietnia 2018 – zadania

1. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$15ab + 21ac + 35bc \leq 37a^2 + 29b^2 + 17c^2.$$

2. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych dodatnich (a, b) spełniających równanie

$$16a^3b^4 = 4b^7 + a^{10}b^2 + 64a^2.$$

3. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$6 \cdot (ab + bc + cd) < 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

4. Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a, b, c, d , dla których zachodzi nierówność

$$5 \cdot (ab + bc + cd) > 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Podaj tylko odpowiedź.

$a = \dots\dots\dots, b = \dots\dots\dots, c = \dots\dots\dots, d = \dots\dots\dots$

5. Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a, b, c, d, e, f , dla których zachodzi nierówność

$$10 \cdot (ab + bc + cd + de + ef) > 9(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

Podaj tylko odpowiedź.

$a = \dots\dots\dots, b = \dots\dots\dots, c = \dots\dots\dots, d = \dots\dots\dots, e = \dots\dots\dots, f = \dots\dots\dots$

Klasówka obejmowała zadania 1–4.

Uczestnicy II etapu OM rozwiązywali zadania 2–5.

Klasówka 13 (piątek) kwietnia 2018 – szkice rozwiązań

1. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$15ab + 21ac + 35bc \leq 37a^2 + 29b^2 + 17c^2.$$

Szkic rozwiązania:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$15ab \leq \frac{25a^2 + 9b^2}{2},$$

$$21ac \leq \frac{49a^2 + 9c^2}{2},$$

$$35bc \leq \frac{49b^2 + 25c^2}{2},$$

co po dodaniu stronami daje nierówność z treści zadania.

2. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych dodatnich (a, b) spełniających równanie

$$16a^3b^4 = 4b^7 + a^{10}b^2 + 64a^2.$$

Szkic rozwiązania:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb $32a^6b$ i $8b^7$ otrzymujemy

$$16a^3b^4 \leq 16a^6b + 4b^7, \quad (1)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $16a^6b = 4b^7$, czyli

$$2a^3 = b^3. \quad (2)$$

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowaną do liczb $2a^{10}b^2$ i $128a^2$ otrzymujemy

$$16a^6b \leq a^{10}b^2 + 64a^2, \quad (3)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{10}b^2 = 64a^2$, czyli

$$a^4b = 8. \quad (4)$$

Dodając stronami nierówności (1) i (3) otrzymujemy nierówność

$$16a^3b^4 \leq 4b^7 + a^{10}b^2 + 64a^2,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą jednocześnie warunki (2) i (4).

Zatem równanie z treści zadania jest równoważne układowi równań (2) i (4), po rozwiązaniu którego otrzymujemy jedną parę liczb rzeczywistych dodatnich (a, b) :

$$a = 2^{8/15}, \quad b = 2^{13/15}.$$

3. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$6 \cdot (ab + bc + cd) < 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Szkic rozwiązania:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$6ab \leq 5a^2 + \frac{9b^2}{5},$$

$$6bc \leq 3b^2 + 3c^2,$$

$$6cd \leq \frac{9c^2}{5} + 5d^2,$$

co po dodaniu stronami daje

$$6 \cdot (ab + bc + cd) \leq 5a^2 + \frac{24b^2}{5} + \frac{24c^2}{5} + 5d^2 < 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

4. Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a, b, c, d , dla których zachodzi nierówność

$$5 \cdot (ab + bc + cd) > 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Podaj tylko odpowiedź.

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 3, \quad d = 2.$$

Szkic rozwiązania:

W nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zachodzi równość w przypadku, gdy liczby, których średnie liczymy, są równe. Wobec tego:

$$5ab = 4a^2 + \frac{25b^2}{16}, \quad \text{gdy } 8a = 5b$$

$$5bc = \frac{5b^2}{2} + \frac{5c^2}{2}, \quad \text{gdy } b = c$$

$$5cd = \frac{25c^2}{16} + 4d^2, \quad \text{gdy } 5c = 8d$$

co po dodaniu stronami daje

$$5 \cdot (ab + bc + cd) = 4a^2 + \frac{65b^2}{16} + \frac{65c^2}{16} + 4d^2 > 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Stąd otrzymujemy: $a = 5, \quad b = 8, \quad c = 8, \quad d = 5$.

5. Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a, b, c, d, e, f , dla których zachodzi nierówność

$$10 \cdot (ab + bc + cd + de + ef) > 9(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

Podaj tylko odpowiedź.

$$a = 4, \quad b = 7, \quad c = 9, \quad d = 9, \quad e = 7, \quad f = 4.$$

Szkic rozwiązania:

W nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zachodzi równość w przypadku, gdy liczby, których średnie liczymy, są równe. Wobec tego:

$$10ab = 9a^2 + \frac{25b^2}{9}, \quad \text{gdy } 9a = 5b$$

$$10bc = \frac{56b^2}{9} + \frac{225c^2}{56}, \quad \text{gdy } 56b = 45c$$

$$10cd = 5c^2 + 5d^2, \quad \text{gdy } c = d$$

$$10de = \frac{225d^2}{56} + \frac{56e^2}{9}, \quad \text{gdy } 45d = 56e$$

$$10ef = \frac{25e^2}{9} + 9f^2, \quad \text{gdy } 5e = 9f$$

co po dodaniu stronami daje

$$\begin{aligned} 10 \cdot (ab + bc + cd + de + ef) &= 9a^2 + 9b^2 + \frac{505c^2}{56} + \frac{505d^2}{56} + 9e^2 + 9f^2 = \\ &= 9a^2 + 9b^2 + 9c^2 + \frac{c^2}{56} + 9d^2 + \frac{d^2}{56} + 9e^2 + 9f^2 > 9(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy: $a = 25, \quad b = 45, \quad c = 56, \quad d = 56, \quad e = 45, \quad f = 25$.