

---

**Klasówka 20 kwietnia 2018 – treści zadań łatwiejszych**

1. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$42ab + 90bc \leq 18a^2 + 65b^2 + 50c^2.$$

2. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$54ab + 70bc \leq 18a^2 + 65b^2 + 50c^2.$$

3. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$3ab^2 + 3bc^2 \leq a^3 + 3b^3 + 2c^3.$$

4. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$3ab^2 + 3bc^2 \leq 4a^3 + 5b^3 + c^3.$$

**Klasówka 20 kwietnia 2018 – treści zadań trudniejszych**

W każdym z zadań **1-12** podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego największą wartość wyrażenia przy  $a$ ,  $b$  i ewentualnie  $c$  przebiegających liczby całkowite dodatnie oraz podaj przykład pary/trójki liczb całkowitych dodatnich  $a$ ,  $b$  i ewentualnie  $c$ , dla której ta największa wartość jest osiągana.

---

1.  $\max \frac{ab}{a^2 + 4b^2} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$

---

2.  $\max \frac{ab}{4a^2 + 9b^2} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$

---

3.  $\max \frac{abc}{a^3 + b^3 + 8c^3} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

---

4.  $\max \frac{abc}{a^3 + 8b^3 + 27c^3} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

---

5.  $\max \frac{abc}{a^2 + 8b^4 + 8c^4} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

---

6.  $\max \frac{abc}{8a^2 + b^4 + c^4} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

---

7.  $\max \frac{abc}{3a^2 + 2b^3 + 64c^6} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

---

8.  $\max \frac{abc}{3a^2 + 16b^3 + c^6} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

---

9.  $\max \frac{ab^2}{4a^3 + b^3} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$

---

10.  $\max \frac{ab^3}{27a^4 + b^4} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$

---

---

11.  $\max \frac{a^2 b^3}{a^5 + 48b^5} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$

---

12.  $\max \frac{ab}{a^3 + b^3 + 64} = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$ ,  $b = \dots\dots\dots$

---

W każdym z zadań **13-20** podaj parę liczb rzeczywistych dodatnich  $x$  i  $y$ , dla której podane wyrażenie osiąga największą wartość.

---

13.  $\max \frac{xy}{x^2 + y^3 + 1}$  jest osiągane dla  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

---

14.  $\max \frac{xy}{x^2 + y^4 + 1}$  jest osiągane dla  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

---

15.  $\max \frac{xy}{x^2 + y^5 + 1}$  jest osiągane dla  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

---

16.  $\max \frac{xy}{x^3 + y^5 + 1}$  jest osiągane dla  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

---

17.  $\max \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6 + xy}$  jest osiągane dla  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

---

18.  $\max \frac{x^2 y^2}{x^8 + y^8 + xy}$  jest osiągane dla  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

---

19.  $\max \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^5 + xy}$  jest osiągane dla  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

---

20.  $\max \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^7 + xy}$  jest osiągane dla  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

---

Zadania **1-12** po **1 punkcie**, zadania **13-18** po **2 punkty**, zadania **19-20** po **3 punkty**.

---

**Klasówka 20 kwietnia 2018 – szkice rozwiązań**

1. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$42ab + 90bc \leq 18a^2 + 65b^2 + 50c^2.$$

*Szkic rozwiązania:*

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$42ab \leq 18a^2 + \frac{49b^2}{2},$$

$$90bc \leq \frac{81b^2}{2} + 50c^2,$$

co po dodaniu stronami daje nierówność z treści zadania.

2. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$54ab + 70bc \leq 18a^2 + 65b^2 + 50c^2.$$

*Szkic rozwiązania:*

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$54ab \leq 18a^2 + \frac{81b^2}{2},$$

$$70bc \leq \frac{49b^2}{2} + 50c^2,$$

co po dodaniu stronami daje nierówność z treści zadania.

3. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$3ab^2 + 3bc^2 \leq a^3 + 3b^3 + 2c^3.$$

*Szkic rozwiązania:*

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb  $a^3, b^3, b^3$  otrzymujemy

$$ab^2 \leq \frac{a^3 + 2b^3}{3},$$

czyli

$$3ab^2 \leq a^3 + 2b^3.$$

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb  $b^3, c^3, c^3$  otrzymujemy

$$bc^2 \leq \frac{b^3 + 2c^3}{3},$$

czyli

$$3bc^2 \leq b^3 + 2c^3.$$

Dodanie stronami otrzymanych nierówności daje nierówność z treści zadania.

4. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$3ab^2 + 3bc^2 \leq 4a^3 + 5b^3 + c^3.$$

*Szkic rozwiązania:*

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb  $4a^3, b^3/2, b^3/2$  otrzymujemy

$$ab^2 \leq \frac{4a^3 + b^3}{3},$$

czyli

$$3ab^2 \leq 4a^3 + b^3.$$

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb  $4b^3, c^3/2, c^3/2$  otrzymujemy

$$bc^2 \leq \frac{4b^3 + c^3}{3},$$

czyli

$$3bc^2 \leq 4b^3 + c^3.$$

Dodanie stronami otrzymanych nierówności daje nierówność z treści zadania.

**Klasówka 20 kwietnia 2018 – odpowiedzi**

W każdym z zadań **1-12** podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego największą wartość wyrażenia przy  $a$ ,  $b$  i ewentualnie  $c$  przebiegających liczby całkowite dodatnie oraz podaj przykład pary/trójki liczb całkowitych dodatnich  $a$ ,  $b$  i ewentualnie  $c$ , dla której ta największa wartość jest osiągnięta.

---

$$1. \max \frac{ab}{a^2 + 4b^2} = \frac{1}{4} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{2}, \quad b = \mathbf{1}$$

---

$$2. \max \frac{ab}{4a^2 + 9b^2} = \frac{1}{12} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{3}, \quad b = \mathbf{2}$$

---

$$3. \max \frac{abc}{a^3 + b^3 + 8c^3} = \frac{1}{6} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{2}, \quad b = \mathbf{2}, \quad c = \mathbf{1}$$

---

$$4. \max \frac{abc}{a^3 + 8b^3 + 27c^3} = \frac{1}{18} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{6}, \quad b = \mathbf{3}, \quad c = \mathbf{2}$$

---

$$5. \max \frac{abc}{a^2 + 8b^4 + 8c^4} = \frac{1}{8} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{4}, \quad b = \mathbf{1}, \quad c = \mathbf{1}$$

---

$$6. \max \frac{abc}{8a^2 + b^4 + c^4} = \frac{1}{8} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{2}, \quad b = \mathbf{2}, \quad c = \mathbf{2}$$

---

$$7. \max \frac{abc}{3a^2 + 2b^3 + 64c^6} = \frac{1}{12} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{8}, \quad b = \mathbf{4}, \quad c = \mathbf{1}$$

---

$$8. \max \frac{abc}{3a^2 + 16b^3 + c^6} = \frac{1}{12} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{8}, \quad b = \mathbf{2}, \quad c = \mathbf{2}$$

---

$$9. \max \frac{ab^2}{4a^3 + b^3} = \frac{1}{3} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{1}, \quad b = \mathbf{2}$$

---

$$10. \max \frac{ab^3}{27a^4 + b^4} = \frac{1}{4} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{1}, \quad b = \mathbf{3}$$

---

---

$$11. \max \frac{a^2 b^3}{a^5 + 48b^5} = \frac{1}{20} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{2}, \quad b = \mathbf{1}$$

---

$$12. \max \frac{ab}{a^3 + b^3 + 64} = \frac{1}{12} \quad \text{dla} \quad a = \mathbf{4}, \quad b = \mathbf{4}$$

---

W każdym z zadań **13-20** podaj parę liczb rzeczywistych dodatnich  $x$  i  $y$ , dla której podane wyrażenie osiąga największą wartość.

---

$$13. \max \frac{xy}{x^2 + y^3 + 1} \quad \text{jest osiąmane dla} \quad x = \sqrt{\mathbf{3}}, \quad y = \sqrt[3]{\mathbf{2}}$$

---

$$14. \max \frac{xy}{x^2 + y^4 + 1} \quad \text{jest osiąmane dla} \quad x = \sqrt{\mathbf{2}}, \quad y = \mathbf{1}$$

---

$$15. \max \frac{xy}{x^2 + y^5 + 1} \quad \text{jest osiąmane dla} \quad x = \sqrt{\mathbf{5/3}}, \quad y = \sqrt[5]{\mathbf{2/3}}$$

---

$$16. \max \frac{xy}{x^3 + y^5 + 1} \quad \text{jest osiąmane dla} \quad x = \sqrt[3]{\mathbf{5/7}}, \quad y = \sqrt[5]{\mathbf{3/7}}$$

---

$$17. \max \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6 + xy} \quad \text{jest osiąmane dla} \quad x = \mathbf{2}^{-1/4}, \quad y = \mathbf{2}^{-1/4}$$

---

$$18. \max \frac{x^2 y^2}{x^8 + y^8 + xy} \quad \text{jest osiąmane dla} \quad x = \mathbf{2}^{-1/3}, \quad y = \mathbf{2}^{-1/3}$$

---

$$19. \max \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^5 + xy} \quad \text{jest osiąmane dla} \quad x = \mathbf{2}^{-3/11} \cdot \mathbf{5}^{4/11}, \quad y = \mathbf{2}^{2/11} \cdot \mathbf{5}^{1/11}$$

---

$$20. \max \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^7 + xy} \quad \text{jest osiąmane dla} \quad x = \mathbf{3}^{1/11} \cdot \mathbf{7}^{6/11}, \quad y = \mathbf{3}^{2/11} \cdot \mathbf{7}^{1/11}$$

---

Zadania **1-12** po **1 punkcie**, zadania **13-18** po **2 punkty**, zadania **19-20** po **3 punkty**.

---