

40. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi nierówność

$$8a \leq a^8 + 7.$$

41. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$8ab \leq a^4 + b^4 + 8.$$

42. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$7a \cdot (b+c) \leq 5 \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

43. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$3 \cdot (ab^2 + bc^2 + ca^2) < a^2 + b^2 + c^2 + 3 \cdot (a^4 + b^4 + c^4).$$

44. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$2ab + 3bc + 6ca \leq 20a^2 + 5b^2 + c^2.$$

45. Wyznacz wszystkie pary niezerowych liczb rzeczywistych (a, b) spełniających równanie

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

46. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności

$$a + b + c + d \leq 2$$

oraz

$$ab + bc + cd + da \geq 1.$$

Udowodnij, że

$$|a - b + c - d| \leq \frac{1}{16}.$$

47. Udowodnij nierówność

$$\sqrt[100]{1,1} < 1,001.$$

48. Udowodnij nierówność

$$\sqrt[100]{1,1} > 1,0009.$$

49. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$abc < \frac{a^2 + b^3 + c^6}{\sqrt{7}}.$$

50. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$(n-2)^{3n-2} \cdot (n+1)^{6n-4} \cdot n^{12} < (n+2)^{3n+2} \cdot (n-1)^{6n+4}.$$