

Małe twierdzenie Fermata

128. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech $0 < k < p$. Udowodnić, że liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p .

129. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech a, b będą liczbami całkowitymi. Dowieść, że

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

130. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

131. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a oraz dowolnej liczby naturalnej k

$$a^{k(p-1)+1} \equiv a \pmod{p}.$$

132. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^{561} \equiv a \pmod{561}.$$

133. Wskazać dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{22} - 2^{22}$.

134. Wskazać dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{16} - 2^{16}$.

135. Wskazać dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $13^{46} - 2^{46}$.

136. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{88} - 2^{88}$.

137. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{66} - 2^{66}$.

138. Wskazać cztery dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{210} - 1$.

139. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $51^{22} - 2^{44}$.

140. Wskazać pięć dwucyfrowych dzielników pierwszych liczby $3^{180} - 2^{120}$.

141. Udowodnić, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n , że

$$n^n \equiv (n+1)^{n+1} \pmod{p}.$$

142. Niech k będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczby $6k+1$, $12k+1$, $18k+1$ są pierwsze. Udowodnić, że liczba

$$n = (6k+1) \cdot (12k+1) \cdot (18k+1)$$

jest liczbą Carmichaela, tzn. dla każdej liczby całkowitej a zachodzi

$$a^n \equiv a \pmod{n}.$$

143. Interesują nas takie liczby całkowite dodatnie $A < B < C < D$, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k , dla której liczby $Ak+1$, $Bk+1$, $Ck+1$, $Dk+1$ są pierwsze, liczba

$$n = (Ak+1) \cdot (Bk+1) \cdot (Ck+1) \cdot (Dk+1)$$

jest liczbą Carmichaela. Podać przykłady kilku czwórek (A, B, C, D) spełniających powyższy warunek.

144. Znaleźć taką liczbę naturalną $n < 55$, że $n^3 \equiv 2 \pmod{55}$.

145. Znaleźć taką liczbę naturalną $n < 91$, że $n^5 \equiv 2 \pmod{91}$.

146. Znaleźć taką liczbę naturalną $n < 4141$, że $n^{67} \equiv 3 \pmod{4141}$.

147. Liczba pierwsza p , liczba naturalna k oraz liczby całkowite a, b spełniają warunek $a \equiv b \pmod{p^k}$. Dowieść, że $a^p \equiv b^p \pmod{p^{k+1}}$.

148. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi przystawanie

$$a^{p^2-p} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

149. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej a zachodzi przystawanie

$$a^{p^5-p^4+5} \equiv a^5 \pmod{p^5}.$$

150. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p , liczby naturalnej k oraz liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi przystawanie

$$a^{(p-1) \cdot p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

151. Liczba naturalna a jest względnie pierwsza z 10, a liczby naturalne m, n spełniają kongruencję

$$m \equiv n \pmod{100}.$$

Dowieść, że wówczas

$$a^m \equiv a^n \pmod{1000}.$$

152. Student napisał na forum:

Czy to przypadek, że często zdarza się Panu użyć liczby 37?
Na wykładach zdarzyło się (o ile dobrze pamiętam), że taka właśnie liczba pojawiła się już 4 razy! Czy też ta liczba coś w sobie ma...?
Dodam, że suma cyfr mojej daty urodzenia to 37 i czy w związku z tym mogę liczyć na dodatkowy punkt?

Wykładowca odpisał:

Po głębokim namyśle zdecydowałem się jednak dodać punkt wszystkim osobom, których data urodzenia ma cyfry w szczególny sposób związane z liczbą 37.
Oto zasady promocji 37:

1. Cyframi daty urodzenia nazywamy 8 cyfr składających się na dzień, miesiąc i rok daty urodzenia zapisanych w postaci dziesiętnej (z ew. początkowym zerem w dniu i miesiącu, co i tak jest bez znaczenia).
2. W promocji nie mogą brać udziału osoby, których suma cyfr daty urodzenia jest równa 37 (sorry, nie mogę nagradzać osoby, która to zaproponowała, więc wykluczam wszystkich, których data urodzenia ma tę własność).
3. Każda osoba, z wyjątkiem wymienionych w punkcie 2, mająca sumę 37-mych potęg cyfr daty urodzenia podzielną przez 37, otrzyma dodatkowy punkt.
4. Każda osoba, z wyjątkiem wymienionych w punkcie 2, mająca sumę 73-cich potęg cyfr daty urodzenia podzielną przez 37, otrzyma dodatkowy punkt.
5. Każda osoba, z wyjątkiem wymienionych w punkcie 2, mająca sumę 73-cich potęg cyfr daty urodzenia podzielną przez 73, otrzyma dodatkowy punkt.
6. Punkty należne na podstawie pkt. 3-5 sumują się.

Przeanalizować **promocję 37** od strony matematycznej.