

**401.** Wyznacz wszystkie ciągi  $(a_n)$  o wyrazach rzeczywistych spełniające dla każdego dodatnich liczb całkowitych  $m, n$  warunek

$$m \cdot n \cdot a_{m+n} = (m+n) \cdot a_m \cdot a_n.$$

**402.** Wyznacz najmniejszą stałą  $C$ , przy której nierówność

$$xy^2 + yz^2 \leq C \cdot (x^3 + y^3 + z^3)$$

jest prawdziwa dla każdego dodatnich liczb rzeczywistych  $x, y, z$ .

**403.** Na płaszczyźnie danych jest 13 różnych punktów kratowych, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij, że pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta o środku ciężkości w punkcie kratowym.

**404.** Udowodnij, że równanie

$$a_1^6 + a_2^6 + \dots + a_8^6 = 9b^6$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych  $a_1, a_2, \dots, a_8, b$ .

**405.** Dana jest liczba pierwsza  $p$  o następujących własnościach:

- istnieją takie dodatnie liczby całkowite  $a, b$  niepodzielne przez  $p$ , że liczba  $a^3 + 2b^3$  jest podzielna przez  $p$ ,
- istnieją takie dodatnie liczby całkowite  $c, d$  niepodzielne przez  $p$ , że liczba  $c^5 + 2d^5$  jest podzielna przez  $p$ .

Udowodnij istnienie takich dodatnich liczb całkowitych  $m, n$  niepodzielnych przez  $p$ , że liczba  $m^{15} + 2n^{15}$  jest podzielna przez  $p$ .

**406.** Ciąg  $(a_n)$  jest określony następująco:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}.$$

Udowodnij, że w ciągu  $(a_n)$  występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 13.

**407.** Łódka zabiera w rejs po jeziorze 7 osób. Udowodnij, że można tak zaplanować rejsy 49-osobowej wycieczki, aby każdego dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz.

**408.** Udowodnij, że dla każdego dodatnich liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$9x^2y^2(x^2 + y^2) \leq x^6 + y^6 + 16x^3y^3.$$

**409.** Udowodnij, że dla każdego dodatnich liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$24x^2y^2(x^2 + y^2) \leq x^6 + y^6 + 54x^3y^3.$$

**410.** Liczby całkowite  $a, b, c, d$  spełniają warunki

$$a + b + c = d,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2,$$

$$\text{NWD}(a, b, c, d) = 1.$$

Udowodnij, że liczba  $|abc|$  jest kwadratem liczby całkowitej.

**411.** Na każdym polu kwadratowej szachownicy o boku 77 znajduje się żarówka. Dysponujemy przełącznikami, które pozwalają na zmianę stanu (zapalona/zgaszona) żarówek umieszczonych na dowolnych 4 polach tworzących kwadrat o boku 2 lub na dowolnych 9 polach tworzących kwadrat o boku 3. Początkowo wszystkie żarówki są zapalone. Rozstrzygnij, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone.

**412.** Na każdym polu kwadratowej szachownicy o boku 77 znajduje się żarówka. Dysponujemy przełącznikami, które pozwalają na zmianę stanu (zapalona/zgaszona) żarówek umieszczonych na dowolnych 9 polach tworzących kwadrat o boku 3 lub na dowolnych 25 polach tworzących kwadrat o boku 5. Początkowo wszystkie żarówki są zapalone. Rozstrzygnij, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone.

**413.** W kuli o promieniu 3 umieszczono 28 sześciątów jednostkowych. Udowodnij, że pewne dwa z tych sześciątów jednostkowych są odległe o mniej niż 1.

**414.** Czy w sześciacie o krawędzi 6 można tak umieścić 28 sześciątów jednostkowych, aby każde dwa z nich były odległe o więcej niż 1?

**415.** Wyznacz największą możliwą wartość sumy  $\sum_{i=1}^{128} a_i b_i c_i$ , gdzie dodatnie liczby rzeczywiste  $a_i, b_i, c_i$  spełniają warunki

$$\sum_{i=1}^{128} a_i^2 = \sum_{i=1}^{128} b_i^3 = \sum_{i=1}^{128} c_i^7 = 1.$$

**416.** Udowodnij, że istnieje 58-cyfrowa liczba o następującej własności: Po przeniesieniu cyfry jedności na początek otrzymujemy liczbę sześciokrotnie większą.

**417.** Dane są takie liczby całkowite  $a, b, c, d, e, f$ , że liczba

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + f^5$$

jest podzielna przez 25. Udowodnij, że liczba

$$a^{25} + b^{25} + c^{25} + d^{25} + e^{25} + f^{25}$$

jest podzielna przez 125.

**418.** Ciąg  $(a_n)$  jest określony następująco:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 6, \quad a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_n.$$

Udowodnij, że w ciągu  $(a_n)$  występuje nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.

**419.** Dwaj gracze grają w następującą grę. W pierwszym ruchu gracz rozpoczynający podaje dodatnią liczbę całkowitą mniejszą od  $10^{10}$ . Kolejne ruchy, wykonywane przez graczy na przemian, polegają na przemnożeniu podanej przez przeciwnika liczby przez liczbę naturalną większą od 1 i mniejszą od  $10^{10}$ .

Gra kończy się, gdy któryś z graczy poda liczbę większą od  $N = 10^{10}$ . Jeżeli ostatnia podana liczba jest mniejsza od  $1,00001 \cdot N$ , wygrywa gracz, który ją podał — w przeciwnym razie ten gracz przegrywa.

Rozstrzygnij, który z graczy ma strategię wygrywającą.

**420.** Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite  $n$  spełniające nierówność

$$n^{512} > 2^{n+4096}.$$

**421.** Sześcian o krawędzi 60 wypełniono klockami o wymiarach  $1 \times 1 \times 11$  oraz sześcianami jednostkowymi. Ile co najmniej sześcianów jednostkowych musiało zostać użytych?

**422.** Udowodnij, że istnieją rosnące postępy arytmetyczne 2018-wyrazowe

$$a_1, a_2, \dots, a_{2018} \quad \text{oraz} \quad b_1, b_2, \dots, b_{2018}$$

o wyrazach całkowitych dodatnich spełniające następujące warunki:

- różnica postępu arytmetycznego  $b_1, b_2, \dots, b_{2018}$  jest dwa razy większa od różnicy postępu arytmetycznego  $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ ,

- iloczyny wyrazów obu postępów są równe, czyli

$$a_1 a_2 \dots a_{2018} = b_1 b_2 \dots b_{2018}.$$

**423.** Udowodnij, że równanie

$$1 + a^2 + b^7 = c^{14}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych  $a, b, c$ .

*Wskazówka:* Przykładami trójek  $(a, b, c)$  spełniających podane równanie są  $(677544, 63, 8)$  i  $(11100203906736, 16128, 127)$ .

**424.** Liczbę całkowitą nazwiemy *skrzyczoną*, jeżeli daje się ją zapisać w postaci  $a^2 + 13b^2$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że iloczyn dwóch liczb skrzyszonych jest liczbą skrzyszoną.

**425.** Rozstrzygnij, czy punkty płaszczyzny można tak pokolorować dziewięcioma kolorami, aby żadne dwa punkty odległe o 1 nie były tego samego koloru.

**426.** Liczbami trójkątnymi nazywamy liczby  $T_n = 1 + 2 + \dots + n$ . Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb trójkątnych, których podwojenie też jest liczbą trójkątną.

**427.** Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$  liczba  $47^n + 122$  jest złożona.

**428.** Wyznacz największą możliwą wartość sumy  $\sum_{i=1}^{128} a_i b_i c_i$ , gdzie dodatnie liczby rzeczywiste  $a_i, b_i, c_i$  spełniają warunki

$$\sum_{i=1}^{128} a_i^2 = \sum_{i=1}^{128} b_i^3 = \sum_{i=1}^{128} c_i^7 = 1.$$

**429.** Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od 1 do 24. W jednym ruchu możemy wymazać dowolne dwie liczby  $x$  i  $y$ , a zamiast nich napisać liczby  $\frac{3x+4y}{5}$  oraz  $\frac{4x-3y}{5}$ . Udowodnij, że na tablicy nie może się pojawić liczba większa od 70. Następnie udowodnij, że na tablicy nie może się pojawić liczba 70.

**430.** Udowodnij, że równanie

$$4a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych  $a, b, c, d$  spełniających warunek  $\text{NWD}(a, b, c, d) = 1$ .