Małe twierdzenie Fermata (c.d.)

201. Wskazać cztery dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{210}-1$.

202. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $51^{22}-2^{44}$.

203. Wskazać pięć dwucyfrowych dzielników pierwszych liczby $3^{180}-2^{120}$.

204. Udowodnić, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że

$$n^n \equiv (n+1)^{n+1} \pmod{p}.$$

205. Niech k będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczby $6k+1$, $12k+1$, $18k+1$ są pierwsze. Udowodnić, że liczba

$$n = (6k+1)\cdot(12k+1)\cdot(18k+1)$$

jest liczbą Carmichaela, tzn. dla każdej liczby całkowitej a zachodzi

$$a^n \equiv a \pmod{n}.$$

206. Interesują nas takie liczby całkowite dodatnie $A<B<C<D$, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k, dla której liczby $Ak+1$, $Bk+1$, $Ck+1$, $Dk+1$ są pierwsze, liczba

$$n = (Ak+1)\cdot(Bk+1)\cdot(Ck+1)\cdot(Dk+1)$$

jest liczbą Carmichaela. Podać przykłady kilku czwórek (A, B, C, D) spełniających powyższy warunek.

207. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<55$, że $n^3 \equiv 2 \pmod{55}$.

208. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<91$, że $n^5 \equiv 2 \pmod{91}$.

209. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<4141$, że $n^{67} \equiv 3 \pmod{4141}$.

210. Liczba pierwsza p, liczba naturalna k oraz liczby całkowite a, b spełniają warunek $a \equiv b \pmod{p^k}$. Dowieść, że $a^p \equiv b^p \pmod{p^{k+1}}$.

211. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi przystawanie

$$a^{p^2-p} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

212. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej a zachodzi przystawanie

$$a^{p^5-p^4+5} \equiv a^5 \pmod{p^5}.$$

213. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p, liczby naturalnej k oraz liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi przystawanie

$$a^{(p-1)\cdot p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

214. Liczba naturalna a jest względnie pierwsza z 10, a liczby naturalne m, n spełniają kongruencję

$$m \equiv n \pmod{100}.$$

Dowieść, że wówczas

$$a^m \equiv a^n \pmod{1000}.$$