

215. Wyznaczyć 1000 cyfr występujących po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $(5 + \sqrt{26})^{1000}$.

216. Wyznaczyć 1000 cyfr występujących po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $(5 + \sqrt{26})^{1001}$.

217. Czy liczba $7 + 5\sqrt{2}$ jest sumą kwadratów 2017 liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi?

218. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n , że $(7 + 4\sqrt{2})^m = (5 + 3\sqrt{2})^n$?

219. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n , że $(5 + 3\sqrt{3})^m = (2 + \sqrt{3})^n$?

220. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n , że $(1 + \sqrt{7})^m = (4 + 2\sqrt{7})^n$?

221. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie k, m, n , że

$$(1 + \sqrt{5})^k \cdot (2 + \sqrt{5})^m = (4 + \sqrt{5})^n?$$

222. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie k, m, n , że

$$(1 + \sqrt{7})^k = (2 + \sqrt{7})^m \cdot (3 + \sqrt{7})^n.$$

223. Dowieść, że równanie $2m^2 + 1 = n^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n .

224. Dowieść, że równanie $2m^2 = n^2 + 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n .

225. Dowieść, że równanie $3m^2 + 1 = n^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n .

226. Dowieść, że równanie $3m^2 = n^2 + 1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n .

227. Dowieść, że równanie $5m^2 + 1 = n^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n .

228. Dowieść, że równanie $5m^2 = n^2 + 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n .

229. Dowieść, że równanie $2m^2 + 7 = n^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n .

230. Wiadomo, że

$$\binom{14}{6} = \binom{15}{5} = 3003.$$

Czy istnieją inne rozwiązania równania

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}?$$

Liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ spełniają warunek

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n.$$

Wpisać w kratkę znak $\leq$ lub $\geq$ i udowodnić podaną nierówność bez korzystania z gotowych twierdzeń (można korzystać z wcześniejszych zadań).

Rozstrzygnąć, czy można pominąć założenie dodatniości liczb $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dopuszczając dowolne liczby rzeczywiste (ewentualnie różne od zera, gdy jest problem z dziedziną nierówności).

231. $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ 1

232. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$ n

233. $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \dots + a_n^4$ n

234. $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_n}$ n

235. $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3$ n

236. $a_1^{17} + a_2^{17} + a_3^{17} + \dots + a_n^{17}$ n

237. $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$ n

238. $\sqrt{a_1^3} + \sqrt{a_2^3} + \sqrt{a_3^3} + \dots + \sqrt{a_n^3}$ n

239. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1$ 3 tylko dla $n = 3$

240. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1$ $\frac{n^2}{4}$ tylko dla $n \geq 5$

241. $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \sqrt{a_3 a_4} + \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} + \sqrt{a_n a_1}$ n

242. $\sqrt[5]{a_1^2 a_2^3} + \sqrt[5]{a_2^2 a_3^3} + \sqrt[5]{a_3^2 a_4^3} + \dots + \sqrt[5]{a_{n-1}^2 a_n^3} + \sqrt[5]{a_n^2 a_1^3}$ n

243. $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$ n

244. $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \frac{a_3^2}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1}$ n

245. $\frac{a_1^5}{a_2^3} + \frac{a_2^5}{a_3^3} + \frac{a_3^5}{a_4^3} + \dots + \frac{a_{n-1}^5}{a_n^3} + \frac{a_n^5}{a_1^3}$ n

246. Dowieść, że wśród dowolnych 6 osób znajdują się 3 osoby, z których każde dwie się znają, lub 3 osoby, z których żadne dwie się nie znają.

247. Każde dwa wierzchołki 10-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

248. Każde dwa wierzchołki 9-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

249. Każde dwa wierzchołki 18-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czworokąt, którego wszystkie boki i przekątne są tego samego koloru.

250. Każde dwa wierzchołki 222-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał sześciokąt, którego wszystkie boki i przekątne są tego samego koloru.

251. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

252. Każde dwa wierzchołki 66-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym, fioletowym lub niebieskim. Dowieść, że powstał trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

253. Każde dwa wierzchołki 1958-kąta foremnego połączono odcinkiem jednego z sześciu kolorów. Dowieść, że powstał trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

254. Każde dwa wierzchołki 34-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

255. Każde dwa wierzchołki 85-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony czworokąt z zielonymi przekątnymi lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

256. Każde dwa wierzchołki 254-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czworokąt, którego wszystkie boki i przekątne są tego samego koloru.

257. Każde dwa wierzchołki 176-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony czworokąt z zielonymi przekątnymi lub niebieski pięciokąt z niebieskimi przekątnymi.

258. Każde dwa wierzchołki 166-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym, fioletowym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony trójkąt lub fioletowy trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

259. Każde dwa wierzchołki 165-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym, fioletowym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony trójkąt lub fioletowy trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

260. Zbiór liczb naturalnych od 1 do 5 podzielono na dwa podzbiory. Dowieść, że znajdują się takie dwie liczby (niekoniecznie różne), że obie te liczby oraz ich suma należą do tego samego podzbioru.

261. Zbiór liczb naturalnych od 1 do 16 podzielono na trzy podzbiory. Dowieść, że znajdują się takie dwie liczby (niekoniecznie różne), że obie te liczby oraz ich suma należą do tego samego podzbioru.

262. Zbiór liczb naturalnych od 1 do 1957 podzielono na sześć podzbiorów. Dowieść, że znajdują się takie dwie liczby (niekoniecznie różne), że obie te liczby oraz ich suma należą do tego samego podzbioru.

263. Liczby niewymierne dodatnie α i β spełniają równanie

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$a_n = [\alpha n] \quad \text{oraz} \quad b_n = [\beta n],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Dowieść, że każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (a_n) , (b_n) .

264. Niech $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ będzie złotą liczbą.

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$[\varphi \cdot [\varphi n]] < [\varphi^2 n].$$

265. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$[\varphi \cdot ([\varphi n] + 1)] > [\varphi^2 n].$$

266. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$[\varphi \cdot [\varphi n]] + 1 = [\varphi^2 n].$$

267. Niech $a_n = [n \cdot \sqrt{2}]$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ oraz niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem złożonym ze wszystkich liczb całkowitych dodatnich niewystępujących w ciągu (a_n) . Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczby a_n i b_n są tej samej parzystości.

268. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania

$$[m \cdot \sqrt{10}] = [n \cdot \sqrt{10}] + 2m + 4n$$

w liczbach całkowitych dodatnich m, n .

269. Ciągi rosnące (a_n) , (b_n) , (c_n) , (d_n) o wyrazach całkowitych dodatnich spełniają następujące warunki:

- (i) każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (a_n) , (b_n) ,
- (ii) każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (c_n) , (d_n) ,
- (iii) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $b_n = a_n + n$,
- (iv) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $d_n = c_n + 4n$.

Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność $2b_n \leq d_n$.

270. Udowodnić, że równanie

$$[m\sqrt{15}] = 5n + [n\sqrt{15}]$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n .