

Indukcja matematyczna

271. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4}.$$

272. Zgadnąć, a następnie udowodnić wzór na sumę (skończoną, bo wyrazy poza trójkątem Pascala są zerami)

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots$$

We wzorze mają prawo pojawić się wyrazy znanego ciągu liczbowego.

273. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

Wskazówka: $5/4 - 1/(2n(n+1))$.

274. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 256$ zachodzi nierówność

$$n^{32} \leq 2^n.$$

275. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 6$ kwadrat (figurę geometryczną) można podzielić na n kwadratów.

276. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1000000n < 2^n + 19000000.$$

277. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}.$$

278. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$9 \cdot (3n)! \cdot n \dots \dots \dots 2 \cdot (3^n \cdot n!)^3.$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$.

279. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 200$ sześcián można podzielić na n sześciánów. Postarać się zastąpić liczbę 200 liczbą mniejszą.

280. Wskazać sensowne liczby rzeczywiste A , B , C , D i dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą oszacowania

$$A \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+B}} < \binom{2n}{n} < C \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+D}}.$$

281. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{3} \cdot n \cdot \sqrt{n+1} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n} < \frac{2}{3} \cdot \sqrt{n} \cdot (n+1).$$