

Uwaga: Z tego, że niektóre osoby znają niektóre zadania nie wynika, że pozostali mają tych zadań nie poznać.

Funkcja Eulera i funkcja Carmichaela

$$\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1} \text{ dla liczby pierwszej } p \text{ i naturalnej } k$$

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \text{ dla wzglednie pierwszych } m, n$$

$$\lambda(2^k) = 2^{k-1} \text{ dla } k = 1, 2$$

$$\lambda(2^k) = 2^{k-2} \text{ dla liczby naturalnej } k \geq 3$$

$$\lambda(p^k) = (p-1)p^{k-1} \text{ dla nieparzystej liczby pierwszej } p \text{ i naturalnej } k$$

$$\lambda(mn) = \text{NWW}(\lambda(m), \lambda(n)) \text{ dla wzglednie pierwszych } m, n$$

501. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne m spełniające warunek: Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, s, t spełniających kongruencje

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{oraz} \quad s \equiv t \pmod{m}$$

zachodzi

$$a^s \equiv b^t \pmod{m}.$$

502. Dla których liczb pierwszych p liczba -1 jest resztą kwadratową modulo p ?

503. Dla których liczb pierwszych p liczba 2 jest resztą kwadratową modulo p ?

504. Dla których liczb pierwszych p liczba 3 jest resztą kwadratową modulo p ?

505. Dla których liczb pierwszych p liczba 5 jest resztą kwadratową modulo p ?

506. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 6 . Dowieść, że wśród sześciu liczb od 1 do 6 są co najmniej trzy reszty kwadratowe modulo p .

507. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 12 . Dowieść, że wśród dwunastu liczb od 1 do 12 są co najmniej trzy reszty sześciennic modulo p .

508. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech p będzie takim dzielnikiem pierwszym liczby $n^{15} - 1$, że żadna z liczb $n^3 - 1$ i $n^5 - 1$ nie dzieli się przez p . Dowieść, że liczba p daje przy dzieleniu przez 30 resztę 1 .

509. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech p będzie takim dzielnikiem pierwszym liczby $n^{15} + 1$, że żadna z liczb $n^3 + 1$ i $n^5 + 1$ nie dzieli się przez p . Dowieść, że liczba p daje przy dzieleniu przez 30 resztę 1 .

510. Niech $a_1 = 3$ oraz $a_{n+1} = 3^{a_n}$ dla $n \geq 1$. Dowieść, że liczby a_{2017} i a_{2018} mają taką samą końcówkę 2000-cyfrową.

511. (Nawiązanie do testu Millera-Rabina) Niech p i q będą różnymi nieparzystymi liczbami pierwszymi i niech $n = pq$. Niech $n - 1 = 2^k \cdot t$, gdzie t jest nieparzyste. Liczbę a nazywamy świadkiem złożoności liczby n , jeżeli zachodzi co najmniej jeden z następujących dwóch warunków (dobranych w sposób klarowny, a nie oszczędny):

$$a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n},$$

$$a^{2^s \cdot t} \not\equiv -1 \pmod{n} \quad \text{i jednocześnie} \quad a^{2^{s+1} \cdot t} \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{dla pewnego } s \geq 0.$$

Udowodnić, że wśród liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ świadkowie złożoności stanowią więcej niż 50%. Czy i jak mocno daje się poprawić to oszacowanie? Co w przypadku $n = pqr$ będącego iloczynem trzech różnych nieparzystych liczb pierwszych?

Zadania do dłuższego pomyślenia

512. Wyznaczyć kres górny zbioru liczb postaci

$$abc + bcd + cde + dea + eab,$$

gdzie a, b, c, d, e przebiegają wszystkie piątki liczb rzeczywistych nieujemnych spełniających warunek

$$a + b + c + d + e = 5.$$

513. Wyznaczyć kres górny zbioru liczb postaci

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab,$$

gdzie a, b, c, d, e, f przebiegają wszystkie szóstki liczb rzeczywistych nieujemnych spełniających warunek

$$a + b + c + d + e + f = 6.$$

514. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p dającej przy dzieleniu przez 8 resztę 1, istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b , że liczba $a^4 + b^4$ jest podzielna przez p i mniejsza od $2p^2$.

515. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_{4096} \quad \text{oraz} \quad n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_{4096},$$

że $m_1 < n_1$, a ponadto dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $k \leq 90$ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{4096} m_i^k = \sum_{i=1}^{4096} n_i^k.$$

516. Dla liczby pierwszej p , na potrzeby tego zadania, *dobrą resztą* nazwiemy każdą taką liczbę całkowitą nieujemną $r < p$, że

$$(r+1)^p \equiv r^p + 1 \pmod{p^2}.$$

Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p , liczba dobrych reszt nie jest podzielna przez 3.

517. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2},$$

gdzie numeracja x 'ów jest rozszerzona cyklicznie: $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$.

518. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2},$$

gdzie numeracja x 'ów jest rozszerzona cyklicznie: $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$.

519. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą. Dodatnie liczby całkowite $m, n < p/2$ spełniają kongruencję

$$m^5 + n^5 \equiv (m+n)^5 \pmod{p}.$$

Udowodnij, że

$$m^{25} + n^{25} \equiv (m+n)^{25} \pmod{p^2}.$$