

520. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y warunek

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

521. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y warunek

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

522. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y warunek

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y).$$

523. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z warunek

$$f(x+y+z) + f(x) + f(y) + f(z) = f(x+y) + f(y+z) + f(z+x).$$

524. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z warunek

$$f(x+y+z) \cdot f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) = f(x+y) \cdot f(y+z) \cdot f(z+x).$$

525. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *superzłożoną*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy jest mniejszy od $\sqrt{n}$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par kolejnych liczb *superzłożonych*.

Spróbuj poprawić ten wynik zastępując pierwiastek kwadratowy pierwiastkiem wyższego stopnia lub żądając więcej niż dwóch kolejnych liczb *superzłożonych*.

526. Udowodnij, że liczba

$$81^9 + 36^9 + 16^9$$

jest złożona.

527. Liczbę pierwszą nazwiemy *klawą*, jeżeli jest dzielnikiem liczby

$$n^{16} + 16n + 1$$

dla pewnej liczby naturalnej n . Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb *klawych*.

528. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b i c , że liczby $a+b+c$ oraz $a^4+b^4+c^4$ są podzielne przez p , ale liczba $a^{16}+b^{16}+c^{16}$ nie jest podzielna przez p .

529. Udowodnij, że istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, że dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ liczby

$$a_1^k + a_2^k + a_3^k + a_4^k + a_5^k + a_6^k + a_7^k$$

są podzielne przez p , ale liczba

$$a_1^7 + a_2^7 + a_3^7 + a_4^7 + a_5^7 + a_6^7 + a_7^7$$

nie jest podzielna przez p .

Spróbuj uogólnić powyższą własność.

530. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają nierówności

$$x + y + z \geq 6, \quad xy + yz + zx \geq 11, \quad xyz \leq 6.$$

Udowodnij, że

$$x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + y^2x + z^2y \geq 48.$$

531. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$(n-2)^{3n-2} \cdot (n+1)^{6n-4} \cdot n^{12} < (n+2)^{3n+2} \cdot (n-1)^{6n+4}.$$

532. Rozstrzygnąć prawdziwość następującego zdania:

Spośród dowolnych 35 różnych liczb naturalnych można wybrać takie trzy różne liczby a, b, c , że liczba $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ jest podzielna przez 17.

533. Rozstrzygnąć prawdziwość następującego zdania:

Spośród dowolnych 34 różnych liczb naturalnych można wybrać takie trzy różne liczby a, b, c , że liczba $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ jest podzielna przez 17.

534. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{\binom{n^2}{n}} < \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}.$$

535. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Oznaczmy

$$n = 3k + 1 \quad \text{oraz} \quad q = 3k^2 + 3k + 1.$$

Udowodnić, że liczba $(n+1)^{n+1} + (-n)^n$ jest podzielna przez q^2 .

536. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ spełniających warunki

$$\sum_{k=1}^9 x_k^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^9 kx_k = 17$$

zachodzą nierówności

$$\frac{1}{11} < \sum_{k=1}^9 x_k^k < \frac{1}{10}.$$