

537. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n wartość wyrażenia

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n}$$

można przedstawić w postaci a^2b^3 dla pewnych liczb naturalnych a, b .

538. Udowodnij, że istnieje liczba naturalna m o następującej własności: każda liczba naturalna $n \geq m$ ma taką wielokrotność mniejszą od $n\sqrt[3]{n^2}$, której zapis dziesiętny nie zawiera cyfry 5.

539. Udowodnij, że równanie

$$(a+b+c)^2 = abc$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c .

540. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^8 + b^{24} + c^{25} + d^{48} + e^{49} = f^8$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d, e, f spełniających warunek $\text{NWD}(a, b, c, d, e, f) = 1$.

541. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba naturalna $n > 2$, że

$$n^{n^n} \equiv 16 \pmod{p}.$$

542. Każde dwa wierzchołki 13-kąta foremnego połączone odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Czy stąd wynika, że pewne trzy wierzchołki danego wielokąta wyznaczają trójkąt o bokach tego samego koloru?

543. Liczby rzeczywiste a, b, c, d, e spełniają równości

$$a = 2c^2 - 1,$$

$$b = 2a^2 - 1,$$

$$c = 2b^2 - 1,$$

$$c = 4e^3 - 3e,$$

$$d = 4c^3 - 3c,$$

$$e = 4d^3 - 3d,$$

Czy stąd wynika, że $a = b = c = d = e = 1$?

544. W Mistrzostwach Świata w Brydżu Sportowym z Dziadkiem bierze udział 211 zawodników. W każdym rozdaniu gra trzech zawodników. Dowieść, że można tak ustalić harmonogram rozgrywek MŚwBSzD, aby każdego dwóch zawodników spotkało się przy rozgrywce dokładnie raz.