

545. Udowodnij, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba

$$\left\lfloor \frac{7 - \sqrt{44}}{8 - \sqrt{44}} \cdot n \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{44}}{8 + \sqrt{44}} \cdot n \right\rfloor$$

jest pierwsza.

546. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p licznik liczby

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{p-1}{k}^2}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest podzielny przez p .

547. Rozstrzygnij, dla których liczb pierwszych p licznik liczby

$$\frac{1}{1^{119}} + \frac{1}{2^{119}} + \frac{1}{3^{119}} + \frac{1}{4^{119}} + \dots + \frac{1}{(p-2)^{119}} + \frac{1}{(p-1)^{119}}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest podzielny przez p^2 .

548. Rozstrzygnij, dla których liczb naturalnych n na płaszczyźnie istnieje n punktów kratowych, których wzajemne odległości są różnymi liczbami całkowitymi, a przy tym żadne trzy z tych punktów nie są współliniowe.

549. Wielomian W o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 123 dla co najmniej pięciu argumentów całkowitych. Udowodnij, że dla żadnego argumentu całkowitego wielomian W nie przyjmuje wartości 1234.

550. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n , że liczba 2^n ma w zapisie dziesiętnym końcówkę n .

551. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną k , dla której suma

$$\sum_n n^k \cdot (-1)^{s(n)}$$

jest różna od zera. Sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby naturalne $n < 10^{2018}$, w których zapisie dziesiętnym nie występuje cyfra 2 ani 7. Symbol $s(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n .

552. Udowodnij, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^{2018^{2018}}$$

po przecinku występuje 2018 jednakowych cyfr.

553. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $\left\lfloor \frac{10^p}{p} \right\rfloor$ jest podzielna przez 10.

554. Rozstrzygnij, czy istnieje liczba naturalna $n > 1$ o następującej własności: Dowolna liczba n -cyfrowa zapisana trzy razy z rzędu tworzy liczbę $3n$ -cyfrową podzielną przez n^2 .

555. Udowodnij, że równanie

$$a_1^{13} + a_2^{13} + a_3^{13} + \dots + a_{28}^{13} = b^{13}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich mniejszych od 100.