556. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości nieujemne dla każdego argumentu rzeczywistego. Dowieść, że $W(x)$ jest sumą kwadratów wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. A może potrafisz dowieść, że $W(x)$ jest sumą kwadratów **dwóch** wielomianów o współczynnikach rzeczywistych?

557. Wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości nieujemne dla każdego argumentu rzeczywistego. Dowieść, że wielomian

$$W(x)+W'(x)+W''(x)+W'''(x)+W^{(4)}(x)+W^{(5)}(x)+\ldots$$

przyjmuje wartości nieujemne dla każdego argumentu rzeczywistego.

558. Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą S o następującej własności:
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność

$$S\cdot(ab+bc+cd)\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\,.$$

559. Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą T o następującej własności:
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$T\cdot(ab+bc+cd+de)\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\,.$$

560. Kwadrat liczby całkowitej dodatniej n jest różnicą sześcianów kolejnych liczb całkowitych (np. dla $n=13$ mamy $13^2=169=8^3-7^3$). Dowieść, że wówczas n jest sumą kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych (w podanym przykładzie: $13=2^2+3^2$).

561. Dowieść, że jeżeli liczba pierwsza p jest postaci $8k\pm1$, to liczba

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^{p-1}-(\sqrt{2}-1)^{p-1}}{\sqrt{2}}$$

jest liczbą całkowitą podzielną przez p.

562. Dowieść, że jeżeli liczba pierwsza p jest postaci $8k\pm3$, to liczba

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^{p+1}-(\sqrt{2}-1)^{p+1}}{\sqrt{2}}$$

jest liczbą całkowitą podzielną przez p.

563. Dowieść, że jeżeli liczba pierwsza p jest postaci $12k\pm1$, to liczba

$$\frac{(2+\sqrt{3})^{p-1}-(2-\sqrt{3})^{p-1}}{\sqrt{3}}$$

jest liczbą całkowitą podzielną przez p.

564. Dowieść, że jeżeli liczba pierwsza p jest postaci $12k\pm5$, to liczba

$$\frac{(2+\sqrt{3})^{p+1}-(2-\sqrt{3})^{p+1}}{\sqrt{3}}$$

jest liczbą całkowitą podzielną przez p.

565. Niech F_n oznacza n-tą liczbę Fibonacciego, gdzie $F_1=F_2=1$. Dowieść, że jeżeli liczba pierwsza p jest postaci $10k\pm1$, to liczba F_{p-1} jest podzielna przez p.

566. Dowieść, że jeżeli liczba pierwsza p jest postaci $10k\pm3$, to liczba F_{p+1} jest podzielna przez p.