567. Dowieść, że istnieją takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_{1463}$ zbioru $\{1,2,\ldots,23\}$, że dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant 1463$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma co najwyżej trzy elementy.

568. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której istnieją liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające warunki

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 25\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 33\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 49\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^4 = 81\,.$$

569. W każdym polu kwadratowej tablicy 18×18 napisano jedną z liczb $1, 2, 3, \ldots, 70$. Dowieść, że istnieje taki **równoległobok** o wierzchołkach w środkach pól tablicy, że sumy liczb wpisanych w pola na końcach jego przekątnych są równe.

570. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające warunek

$$y^2 \cdot f(x) + f\left(xy^2\right) = 2y \cdot f(xy)$$

dla dowolnych $x,y \in \mathbb{R}$.

571. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca dla dowolnych $x,y \in \mathbb{R}$ warunek

$$(f(x)\cdot f(y))^2 = f(x-y)\cdot f(x+y)\,,$$

że

$$f(0) = f(1) = 1 \neq f(1/3)\,.$$

572. Dowieść, że każda liczba wymierna daje się zapisać w postaci $a^4+b^4-c^4-d^4$, gdzie a, b, c, d są liczbami wymiernymi.

573. Tasowanie kart przebiega następująco: Bierzemy talię kart w prawą rękę i przerzucamy do lewej ręki po jednej karcie, raz na wierzch, raz pod spód. Najpierw przerzucamy do lewej ręki pierwszą kartę z wierzchu, potem drugą kartę wrzucamy na wierzch pierwszej, trzecią pod spód, czwartą na wierzch, piatą pod spód i tak dalej. Tak więc karty ułożone w kolejności:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots$$

po jednokrotnym przetasowaniu ułożą się w kolejności

$$\ldots,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

Dowieść, że przy wielokrotnym tasowaniu talii złożonej z k kart, po nie więcej niż k tasowaniach otrzymamy początkowe ułożenie kart.

574. Dowieść, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n iloczyn wszystkich liczb pierwszych p spełniających nierówności $n < p \leqslant 2n$ jest mniejszy od 4^n.

575. Dowieść, że dla każdej odpowiednio dużej liczby naturalnej n, między n i $2n$ jest więcej niż 2018 liczb pierwszych.