

576. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n \geq -1$ spełniające warunki:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \frac{n}{3} \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n x_i^3 = 0.$$

577. Na płaszczyźnie dane są punkty $A_1, A_2, \dots, A_{7777}$, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij, że można wybrać takie punkty $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_7}$, gdzie $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_7 \leq 7777$, że dla $1 \leq i < j < k \leq 7$ zachodzi $\angle A_{n_i} A_{n_j} A_{n_k} > 108^\circ$.

578. Rozstrzygnij, czy liczba ciągów $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ liczb naturalnych spełniających równanie

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}} = 1$$

jest parzysta.

Przypomnienie: Ciągi różniące się kolejnością wyrazów są różne.

579. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y, z \geq 1$ zachodzi nierówność

$$(x+y+z)^{x+y+z} x^x y^y z^z < \frac{3}{4} (x+y)^{x+y} (x+z)^{x+z} (y+z)^{y+z}.$$

580. Na okręgu napisano $n \geq 3$ liczb całkowitych dodatnich, wśród których jest $k \geq 1$ jedynek. Przy każdej liczbie dopisano iloraz sumy jej sąsiadów przez nią samą. Okazało się, że wszystkie dopisane liczby są całkowite.

Udowodnij, że przy ustalonych n i k , suma dopisanych liczb nie zależy od tego, jakie liczby napisano na okręgu.

581. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej ε istnieją takie liczby całkowite dodatnie m i n , że

$$m^3 < n^2 < m^3 + \varepsilon m.$$

582. Okrąg ω leży wewnątrz okręgu Ω i przechodzi przez jego środek. Parami różne okręgi $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6$ są styczne wewnętrznie do okręgu Ω i zewnętrznie do okręgu ω . Ponadto dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ okręgi o_i oraz o_{i+1} są styczne zewnętrznie (przyjmujemy numerowanie cykliczne $o_7 = o_1$).

Wyznacz wszystkie możliwe wartości stosunku promienia okręgu ω do promienia okręgu Ω .