

1. Czy szachownicę  $8 \times 8$  z usuniętymi dwoma przeciwległymi polami narożnymi można pokryć kostkami domina o wymiarach  $1 \times 2$  ?
2. Czy szachownicę  $8 \times 8$  z usuniętym polem narożnym można pokryć klocekami o wymiarach  $1 \times 3$  ?
3. Na szachownicy  $8 \times 8$  ułożono 21 kloceków o wymiarach  $1 \times 3$  tak, aby każdy klocek pokrywał całkowicie 3 pola. Które z pól mogły pozostać wolne?
4. Czy szachownicę  $8 \times 8$  można pokryć 12 klocekami o wymiarach  $5 \times 1$  i jednym klocekami o wymiarach  $2 \times 2$  umieszczonym w rogu szachownicy?
5. Czy szachownicę  $8 \times 8$  można pokryć 12 klocekami o wymiarach  $5 \times 1$  i jednym klocekami o wymiarach  $2 \times 2$ ?
6. Ile maksymalnie prostokątów  $1 \times 7$  można wyciąć z szachownicy  $10 \times 10$ , tnąc tylko po bokach pól?
7. Z szachownicy o wymiarach  $13 \times 13$  usunięto wszystkie cztery narożne pola. Dowieść, że tak powstałej figury nie da się rozciąć na prostokąty o wymiarach  $1 \times 5$ .
8. Dana jest kwadratowa szachownica o boku  $4n + 3$  podzielona na pola jednostkowe. Chcemy wyciąć z niej, tnąc tylko po bokach pól, możliwie najwięcej kwadratów o boku 4. Ile maksymalnie kwadratów można wyciąć?
9. Czy istnieje taka liczba naturalna  $n$ , że z kwadratu o boku  $4n + 3$  można wyciąć więcej niż  $n^2$  kwadratów o boku 4 ?
10. Dana jest kwadratowa szachownica o boku  $3n - 1$  podzielona na pola jednostkowe. Ułożono na niej  $n^2 - 1$  kwadratów o boku 2, z których każdy pokrywa 4 pola, a przy tym żadne pole nie jest pokryte przez więcej niż jeden kwadrat. Dowieść, że na szachownicy można położyć jeszcze jeden kwadrat o boku 2 pokrywający 4 wolne pola.
11. Czy szachownicę  $2014 \times 2014$  z usuniętym jednym narożnym polem można pokryć klocekami  $1 \times 5$  i 5-polowymi klocekami w kształcie krzyżyka?
12. Kwadrat o boku długości  $n$  dzielimy na  $n^2$  kwadratów jednostkowych. Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których taki kwadrat można pociąć wzdłuż linii tego podziału na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2 lub 3.
13. ... z których każdy ma bok długości 2 lub 5.
14. ... z których każdy ma bok długości 3 lub 5.
15. Kwadrat o boku długości  $n$  dzielimy na  $n^2$  kwadratów jednostkowych. Czy istnieje liczba naturalna  $n$  względnie pierwsza z 30, dla której taki kwadrat można pociąć wzdłuż linii tego podziału na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2, 3 lub 5 ?
16. Rozstrzygnąć, czy kwadrat o boku 11 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary  $1 \times 7$  lub  $1 \times 9$ .
17. Rozstrzygnąć, czy kwadrat o boku 12 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary  $1 \times 7$  lub  $1 \times 9$ .
18. Rozstrzygnąć, czy kwadrat o boku 19 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary  $1 \times 9$  lub  $1 \times 13$ .

**19.** Na potrzeby tego zadania liczbę całkowitą dodatnią  $n$  nazwiemy *ładną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której kwadrat ma w zapisie dziesiętnym sumę cyfr równą  $n$ . Dowieść, że wśród liczb od 1 do 2017 jest mniej niż 1000 liczb *ładnych*.

**20.** Na potrzeby tego zadania liczbę całkowitą dodatnią  $n$  nazwiemy *ładną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której sześciąt ma w zapisie dziesiętnym sumę cyfr równą  $n$ . Dowieść, że wśród liczb od 1 do 2017 jest mniej niż 700 liczb *ładnych*.

**21.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, których nie można przedstawić w postaci sumy trzech kwadratów liczb całkowitych.

**22.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, których nie można przedstawić w postaci sumy trzech sześciątów liczb całkowitych (niekoniecznie dodatnich).

**23.** Sformułować cechę podzielności przez 32.

**24.** Wyznaczyć liczbę takich liczb całkowitych dodatnich  $d$ , że prawdziwa jest następująca cecha podzielności: Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ , liczba  $n$  jest podzielna przez  $d$  wtedy i tylko wtedy, gdy jej siedmiocyfrowa końcówka tworzy liczbę podzielną przez  $d$ .

**25.** Wskazać dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby  $6^{17} + 5^{17}$ .

**26.** Wskazać dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby  $6^{22} + 5^{22}$ .

**27.** Wskazać dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby  $17^{26} - 2^{26}$ .

**28.** Wskazać dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby  $2^{25} - 1$ .

**29.** Wskazać dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby  $2^{25} + 1$ .

**30.** Wskazać dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby  $3^{136} - 2^{136}$ .

**31.** Dowieść, że wśród liczb  $3^n + 2^n$ , gdzie  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2017\}$ , jest mniej niż 20 liczb pierwszych.

**32.** Dowieść, że wśród liczb  $3^n - 2^n$ , gdzie  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2017\}$ , jest mniej niż 500 liczb pierwszych.

**33.** Wyznaczyć największy wspólny dzielnik liczb  $n^2 - n$ , gdzie  $n$  przebiega wszystkie liczby całkowite dodatnie.

**34.** Wyznaczyć największy wspólny dzielnik liczb  $n^3 - n$ , gdzie  $n$  przebiega wszystkie liczby całkowite dodatnie.

**35.** Wyznaczyć największy wspólny dzielnik liczb  $n^5 - n$ , gdzie  $n$  przebiega wszystkie liczby całkowite dodatnie.

**36.** Wyznaczyć największy wspólny dzielnik liczb  $n^7 - n$ , gdzie  $n$  przebiega wszystkie liczby całkowite dodatnie.

**37.** Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

**38.** Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci  $4k + 3$ .

**39.** Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci  $6k + 5$ .