Małe twierdzenie Fermata

128. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech $0<k<p$. Udowodnić, że liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p.

129. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech a, b będą liczbami całkowitymi. Dowieść, że

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

130. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

131. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a oraz dowolnej liczby naturalnej k

$$a^{k(p-1)+1} \equiv a \pmod{p}.$$

132. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^{561} \equiv a \pmod{561}.$$

133. Wskazać dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{22}-2^{22}$.

134. Wskazać dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{16}-2^{16}$.

135. Wskazać dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $13^{46}-2^{46}$.

136. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{88}-2^{88}$.

137. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{66}-2^{66}$.

138. Wskazać cztery dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{210}-1$.

139. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $51^{22}-2^{44}$.

140. Wskazać pięć dwucyfrowych dzielników pierwszych liczby $3^{180}-2^{120}$.

141. Udowodnić, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że

$$n^n \equiv (n+1)^{n+1} \pmod{p}.$$

142. Niech k będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczby $6k+1$, $12k+1$, $18k+1$ są pierwsze. Udowodnić, że liczba

$$n = (6k+1)\cdot(12k+1)\cdot(18k+1)$$

jest liczbą Carmichaela, tzn. dla każdej liczby całkowitej a zachodzi

$$a^n \equiv a \pmod{n}.$$

143. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<55$, że $n^3 \equiv 2 \pmod{55}$.

144. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<91$, że $n^5 \equiv 2 \pmod{91}$.

145. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<4141$, że $n^{67} \equiv 3 \pmod{4141}$.

146. Liczba pierwsza p, liczba naturalna k oraz liczby całkowite a, b spełniają warunek $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ p^k\right)$. Dowieść, że $a^p \equiv b^p \left(\mathrm{mod}\ p^{k+1}\right)$.

147. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi przystawanie

$$a^{p^2-p} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ p^2\right).$$