Liczby rzeczywiste dodatnie a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ spełniają warunek

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=n\,.$$

Wpisać w kratkę znak $\leqslant$ lub $\geqslant$ i udowodnić podaną nierówność bez korzystania z gotowych twierdzeń (można korzystać z wcześniejszych zadań).

Rozstrzygnąć, czy można pominąć założenie dodatniości liczb a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ dopuszczając dowolne liczby rzeczywiste (ewentualnie różne od zera, gdy jest problem z dziedziną nierówności).

201. $a_1a_2a_3\ldots a_n \;\Box\; 1$

202. $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2 \;\Box\; n$

203. $a_1^4+a_2^4+a_3^4+\ldots+a_n^4 \;\Box\; n$

204. $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_n} \;\Box\; n$

205. $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots+a_n^3 \;\Box\; n$

206. $a_1^{17}+a_2^{17}+a_3^{17}+\ldots+a_n^{17} \;\Box\; n$

207. $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n} \;\Box\; n$

208. $\sqrt{a_1^3}+\sqrt{a_2^3}+\sqrt{a_3^3}+\ldots+\sqrt{a_n^3} \;\Box\; n$

209. $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1 \;\Box\; 3$ tylko dla $n=3$

210. $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1 \;\Box\; \frac{n^2}{4}$ tylko dla $n\geqslant 5$

211. $\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_4}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}+\sqrt{a_na_1} \;\Box\; n$

212. $\sqrt[5]{a_1^2a_2^3}+\sqrt[5]{a_2^2a_3^3}+\sqrt[5]{a_3^2a_4^3}+\ldots+\sqrt[5]{a_{n-1}^2a_n^3}+\sqrt[5]{a_n^2a_1^3} \;\Box\; n$

213. $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \;\Box\; n$

214. $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\frac{a_3^2}{a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1} \;\Box\; n$

215. $\frac{a_1^5}{a_2^3}+\frac{a_2^5}{a_3^3}+\frac{a_3^5}{a_4^3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^5}{a_n^3}+\frac{a_n^5}{a_1^3} \;\Box\; n$

216. Dowieść, że wśród dowolnych 6 osób znajdą się 3 osoby, z których każde dwie się znają, lub 3 osoby, z których żadne dwie się nie znają.

217. Każde dwa wierzchołki 10-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

218. Każde dwa wierzchołki 9-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

219. Każde dwa wierzchołki 18-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czworokąt, którego wszystkie boki i przekątne są tego samego koloru.

220. Każde dwa wierzchołki 222-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał sześciokąt, którego wszystkie boki i przekątne są tego samego koloru.

221. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

222. Każde dwa wierzchołki 66-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym, fioletowym lub niebieskim. Dowieść, że powstał trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

223. Każde dwa wierzchołki 1958-kąta foremnego połączono odcinkiem jednego z sześciu kolorów. Dowieść, że powstał trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

224. Każde dwa wierzchołki 34-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

225. Każde dwa wierzchołki 85-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony czworokąt z zielonymi przekątnymi lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

226. Każde dwa wierzchołki 254-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czworokąt, którego wszystkie boki i przekątne są tego samego koloru.

227. Każde dwa wierzchołki 176-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony czworokąt z zielonymi przekątnymi lub niebieski pięciokąt z niebieskimi przekątnymi.

228. Każde dwa wierzchołki 166-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym, fioletowym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony trójkąt lub fioletowy trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

229. Każde dwa wierzchołki 165-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym, fioletowym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony trójkąt lub fioletowy trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

230. Zbiór liczb naturalnych od 1 do 5 podzielono na dwa podzbiory. Dowieść, że znajdą się takie dwie liczby (niekoniecznie różne), że obie te liczby oraz ich suma należą do tego samego podzbioru.

231. Zbiór liczb naturalnych od 1 do 16 podzielono na trzy podzbiory. Dowieść, że znajdą się takie dwie liczby (niekoniecznie różne), że obie te liczby oraz ich suma należą do tego samego podzbioru.

232. Zbiór liczb naturalnych od 1 do 1957 podzielono na sześć podzbiorów. Dowieść, że znajdą się takie dwie liczby (niekoniecznie różne), że obie te liczby oraz ich suma należą do tego samego podzbioru.

233. Liczby niewymierne dodatnie α i β spełniają równanie

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\,.$$

Dla $n\in\mathbb{N}$ definiujmy

$$a_n=[\alpha n] \qquad \text{oraz} \qquad b_n=[\beta n]\,,$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Dowieść, że każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (a_n), (b_n).

234. Niech $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ będzie *złotą liczbą*.

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$[\varphi\cdot[\varphi n]]<\left[\varphi^2 n\right]\,.$$

235. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$[\varphi\cdot([\varphi n]+1)]>\left[\varphi^2 n\right]\,.$$

236. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$[\varphi\cdot[\varphi n]]+1=\left[\varphi^2 n\right]\,.$$

237. Niech $a_n=\left[n\cdot\sqrt{2}\right]$ dla $n=1,2,3,\ldots$ oraz niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem złożonym ze wszystkich liczb całkowitych dodatnich niewystępujących w ciągu (a_n). Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczby a_n i b_n są tej samej parzystości.

238. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania

$$\left[m\cdot\sqrt{10}\right]=\left[n\cdot\sqrt{10}\right]+2m+4n$$

w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

239. Ciągi rosnące (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) o wyrazach całkowitych dodatnich spełniają następujące warunki:

(i) każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (a_n), (b_n),

(ii) każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (c_n), (d_n),

(iii) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $b_n=a_n+n$,

(iv) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $d_n=c_n+4n$.

Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność $2b_n\leqslant d_n$.

240. Udowodnić, że równanie

$$\left[m\sqrt{15}\right]=5n+\left[n\sqrt{15}\right]$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

Indukcja matematyczna

241. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+5\cdot 3^4+...+n\cdot 3^{n-1}=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^n+\frac{1}{4}\ .$$

242. Zgadnąć, a następnie udowodnić wzór na sumę (skończoną, bo wyrazy poza trójkątem Pascala są zerami)
$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\ldots$$
We wzorze mają prawo pojawić się wyrazy znanego ciągu liczbowego.

243. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}\ .$$
Wskazówka: $5/4-1/(2n(n+1))$.

244. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant 256$ zachodzi nierówność
$$n^{32}\leqslant 2^n\ .$$

245. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant 6$ kwadrat (figurę geometryczną) można podzielić na n kwadratów.

246. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$1000000n<2^n+19000000\,.$$

247. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n+4}{n}<2^{2n+1}.$$

248. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$9\cdot(3n)!\cdot n............2\cdot\left(3^n\cdot n!\right)^3\ .$$
W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geqslant$, $\leqslant$.

249. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 200$ sześcian można podzielić na n sześcianów. Postarać się zastąpić liczbę 200 liczbą mniejszą.

250. Wskazać sensowne liczby rzeczywiste A, B, C, D i dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą oszacowania
$$A\cdot\frac{4^n}{\sqrt{n+B}}<\binom{2n}{n}<C\cdot\frac{4^n}{\sqrt{n+D}}\ .$$

251. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}\ <\ \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\ <\ \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,.$$

252. Dowieść, że w dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie. W jakiej proporcji są one dzielone przez punkt przecięcia? Jakie są proporcje pól sześciu trójkątów, na które środkowe dzielą trójkąt?

253. Dowieść, że w dowolnym czworościanie środkowe przecinają się w jednym punkcie. W jakiej proporcji są one dzielone przez punkt przecięcia? Środkowa czworościanu to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem ciężkości przeciwległej ściany.

254. Dowieść, że w dowolnym czworościanie odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi przecinają się w jednym punkcie.

255. Dowieść, że w dowolnym ostrosłupie o podstawie będącej czworokątem wypukłym odcinki łączące środki ciężkości ścian bocznych ze środkami przeciwleglych krawędzi podstawy przecinają się w jednym punkcie. W jakiej proporcji odcinki te są dzielone przez punkt przecięcia?

256. Dowieść, że w dowolnym trójkącie dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie. W jakiej proporcji są one dzielone przez punkt przecięcia? Jakie są proporcje pól sześciu trójkątów, na które dwusieczne dzielą trójkąt?

257. W trójkącie ABC punkty A' i B' leżą odpowiednio na bokach BC i AC, przy czym

$$\frac{BA'}{A'C}=a \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AB'}{B'C}=b\,.$$

Punkt C' jest takim punktem boku AB, że odcinki AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie. Wyznaczyć $AC'/C'B$. W jakiej proporcji odcinki AA', BB' i CC' są dzielone przez punkt przecięcia? Jakie są proporcje pól sześciu trójkątów, na które te odcinki dzielą trójkąt ABC?

258. Dla którego punktu wewnątrz trójkąta równobocznego suma jego odległości od boków trójkąta jest najmniejsza?

259. Dla którego punktu wewnątrz trójkąta równobocznego suma jego odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza?

260. Dla którego punktu wewnątrz czworościanu foremnego suma jego odległości od ścian czworościanu jest najmniejsza?

261. Dla którego punktu wewnątrz czworościanu foremnego suma jego odległości od wierzchołków czworościanu jest najmniejsza?

262. Dla którego punktu wewnątrz czworościanu foremnego suma jego odległości od krawędzi czworościanu jest najmniejsza?

263. Dla którego punktu wewnątrz czworościanu (dowolnego) suma jego odległości od środków krawędzi czworościanu jest najmniejsza?

264. Chomik ma pod ziemią cztery spiżarnie znajdujące się w wierzchołkach czworościanu foremnego. Chomik chce połączyć te spiżarnie siecią dróg o możliwie najkrótszej łącznej długości. Chomik wpadł na pomysł, aby połączyć każdą spiżarnię ze środkiem ciężkości czworościanu. Czy powstała w ten sposób sieć dróg jest najkrótszą z możliwych?