Funkcja Eulera i funkcja Carmichaela

$\varphi\left(p^k\right)=(p-1)p^{k-1}$ dla liczby pierwszej p i naturalnej k

$\varphi(mn)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$ dla względnie pierwszych m, n

$\lambda\left(2^k\right)=2^{k-1}$ dla $k=1,2$

$\lambda\left(2^k\right)=2^{k-2}$ dla liczby naturalnej $k\geqslant 3$

$\lambda\left(p^k\right)=(p-1)p^{k-1}$ dla nieparzystej liczby pierwszej p i naturalnej k

$\lambda(mn)=\mathrm{NWW}(\lambda(m),\lambda(n))$ dla względnie pierwszych m, n

265. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne m spełniające warunek: Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, s, t spełniających kongruencje

$$a\equiv b \pmod m \qquad \text{oraz} \qquad s\equiv t \pmod m$$

zachodzi

$$a^s\equiv b^t \pmod m\,.$$

266. Rozstrzygnąć, dla których liczb naturalnych k prawdziwe jest następujące zdanie: Jeżeli liczby naturalne s i t mają taką samą końcówkę k-cyfrową, to dla dowolnej liczby naturalnej a względnie pierwszej z 10 liczby a^s i a^t mają taką samą końcówkę k+1-cyfrową.

267. Rozstrzygnąć, dla których liczb naturalnych k prawdziwe jest następujące zdanie: Jeżeli liczby naturalne s i t mają taką samą końcówkę k-cyfrową, to dla dowolnych liczb naturalnych a, b względnie pierwszych z 10 liczby a^{b^s} i a^{b^t} mają taką samą końcówkę k+2-cyfrową.

Reszty i niereszty kwadratowe (i wyższych stopni)

Liczbę całkowitą r nazywamy resztą kwadratową (odpowiednio: sześcienną i stopnia k) modulo m, jeżeli kongruencja

$$x^2\equiv r \pmod m$$

ma rozwiązanie całkowite x. Odpowiednio: $x^3\equiv r \pmod m$ i $x^k\equiv r \pmod m$.

W przeciwnym razie resztę r nazywamy nieresztą kwadratową (odpowiednio: sześcienną i stopnia k) modulo m.

268. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile wśród liczb $1,2,3,\ldots,p-1$ jest reszt kwadratowych, a ile niereszt kwadratowych?

269. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile wśród liczb $1,2,3,\ldots,p-1$ jest reszt sześciennych, a ile niereszt sześciennych?

270. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile wśród liczb $1,2,3,\ldots,p-1$ jest reszt, a ile niereszt bikwadratowych (czwartego stopnia)?

271. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile wśród liczb $1,2,3,\ldots,p-1$ jest reszt, a ile niereszt piątego stopnia?

272. Liczbę naturalną g względnie pierwszą z m nazywamy pierwiastkiem pierwotnym (lub generatorem) modulo m, jeżeli dla każdej liczby naturalnej r względnie pierwszej z m kongruencja

$$g^t\equiv r \pmod m$$

ma rozwiązanie naturalne t. Wyznaczyć liczbę nieujemnych pierwiastków pierwotnych modulo m mniejszych od m.

273. Dla których liczb pierwszych p liczba -1 jest resztą kwadratową modulo p?

274. Dla których liczb pierwszych p liczba 2 jest resztą kwadratową modulo p?

275. Dla których liczb pierwszych p liczba 3 jest resztą kwadratową modulo p?

276. Dla których liczb pierwszych p liczba 5 jest resztą kwadratową modulo p?

277. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 6. Dowieść, że wśród sześciu liczb od 1 do 6 są co najmniej trzy reszty kwadratowe.

278. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby 2^p-1 daje przy dzieleniu przez p resztę 1.

279. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby 2^p+1 różny od 3 daje przy dzieleniu przez p resztę 1.

280. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych zakończonych cyfrą 1.

281. Niech k będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby $2^{2^k}+1$ daje przy dzieleniu przez 2^{k+1} resztę 1.

282. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby $2^{2^k}+1$ daje przy dzieleniu przez 2^{k+2} resztę 1.

283. Dowieść, że liczba 127 jest pierwsza nie wykonując żadnego dzielenia tej liczby przez mniejsze liczby.

284. Dowieść, że liczba $2^{16}+1$ jest pierwsza.

285. Dowieść, że liczba $2^{11}-1$ jest złożona.

286. Niech $p=4k+3>3$ będzie taką liczbą pierwszą, że liczba $q=2p+1$ też jest pierwsza. Dowieść, że liczba 2^p-1 jest złożona.

287. Wiadomo, że liczba $2^{32}+1$ ma dzielnik pierwszy mniejszy od 700. Wskazać ten dzielnik.

288. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech p będzie takim dzielnikiem pierwszym liczby $n^{15}-1$, że żadna z liczb n^3-1 i n^5-1 nie dzieli się przez p. Dowieść, że liczba p daje przy dzieleniu przez 30 resztę 1.

289. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech p będzie takim dzielnikiem pierwszym liczby $n^{15}+1$, że żadna z liczb n^3+1 i n^5+1 nie dzieli się przez p. Dowieść, że liczba p daje przy dzieleniu przez 30 resztę 1.

290. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech p będzie takim dzielnikiem pierwszym liczby $n^{105}-1$, że żadna z liczb $n^{15}-1$, $n^{21}-1$ i $n^{35}-1$ nie dzieli się przez p. Dowieść, że liczba p daje przy dzieleniu przez 210 resztę 1.