301. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$27\cdot(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\leqslant 8\cdot(a+b+c)^3\,.$$

302. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$8abc\leqslant(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\,.$$

303. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$24abcd\leqslant(a+d)\cdot(b+d)\cdot(c+d)\cdot(a+b+c)\,.$$

304. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$81abcd\leqslant 4\cdot(a+d)\cdot(b+d)\cdot(c+d)\cdot(a+b+c)\,.$$

305. Udowodnij, że liczba

$$81^9+36^9+16^9$$

jest złożona.

306. Wykaż, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $(54n)!$ jest podzielna przez liczbę $(56!)^n$.

307. Komisja Finansowa liczy sześć osób, w tym przewodniczący. Należy zamontować w skarbcu jak najmniejszą liczbę zamków i rozdać klucze członkom komisji tak, aby spełnione były następujące warunki:
• każdych czterech członków KF może otworzyć skarbiec,
• żadnych dwóch członków KF nie może otworzyć skarbca,
• trzech członków KF może otworzyć skarbiec wtedy i tylko wtedy, gdy wśród nich jest przewodniczący.

Wyznacz liczbę zamków, które należy zamontować w skarbcu.

308. Udowodnij, że istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, że dla $k=1,2,3,4,5,6$ liczby

$$a_1^k+a_2^k+a_3^k+a_4^k+a_5^k+a_6^k+a_7^k$$

są podzielne przez p, ale liczba

$$a_1^7+a_2^7+a_3^7+a_4^7+a_5^7+a_6^7+a_7^7$$

nie jest podzielna przez p.

309. Liczbę pierwszą nazwiemy *klawą*, jeżeli jest dzielnikiem liczby

$$n^{16}+16n+1$$

dla pewnej liczby naturalnej n. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb *klawych*.

310. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b i c, że liczby $a+b+c$ oraz $a^4+b^4+c^4$ są podzielne przez p, ale liczba $a^{16}+b^{16}+c^{16}$ nie jest podzielna przez p.

311. Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\ldots+\frac{k}{k^4+k^2+1}+\ldots+\frac{2016}{2016^4+2016^2+1}<\frac{1}{2}.$$

312. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, że

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=7.$$

Wykaż, że istnieje permutacja

$$(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7)$$

liczb

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7),$$

dla której spełniona jest nierówność

$$b_1b_2+b_2b_3+b_3b_4+b_4b_5+b_5b_6+b_6b_7+b_7b_1\leqslant 7.$$

313. Wzdłuż ulicy stoją lampy ponumerowane liczbami od 1 do 100. Początkowo wszystkie lampy są zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy zmienić stan (zapalona/zgaszona) trzech różnych lamp o numerach tworzących trójwyrazowy ciąg geometryczny. Czy po pewnej liczbie takich ruchów można uzyskać sytuację, w której dokładnie jedna lampa jest zapalona? Odpowiedź uzasadnij.

314. Udowodnij, że wśród liczb $n^{n^n}+1$, gdzie n przebiega dodatnie liczby całkowite mniejsze od 10^{100}, jest nie więcej niż 10 liczb pierwszych.

315. Czy istnieje liczba pierwsza $p\neq 3$ oraz takie liczby całkowite a, b, c niepodzielne przez p, że liczby $a+b+c$ oraz $a^2+b^2+c^2$ są podzielne przez p?

316. Czy istnieje liczba pierwsza $p\neq 3$ oraz takie liczby całkowite a, b, c niepodzielne przez p, że liczby $a+b+c$ oraz $a^3+b^3+c^3$ są podzielne przez p?

317. Czy prostokątnymi paskami papieru o wymiarach 1×4 można okleić trzy ściany prostopadłościanu $10\times 10\times 11$ mające wspólny wierzchołek? Paski można zaginać wzdłuż krawędzi prostopadłościanu, ale nie mogą na siebie zachodzić ani wystawać poza oklejane ściany.

318. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają nierówności

$$x+y+z\geqslant 6, \qquad xy+yz+zx\geqslant 11, \qquad xyz\leqslant 6.$$

Udowodnij, że

$$x^2y+y^2z+z^2x+x^2z+y^2x+z^2y\geqslant 48.$$

319. Rozstrzygnij, czy istnieje sześcian o wierzchołkach w punktach kratowych, którego długość krawędzi nie jest liczbą całkowitą.

320. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

jest rosnący.

321. Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

jest malejący.

322. Interesują nas rozwiązania równania

$$m^m\cdot n^n=k^k$$

w liczbach naturalnych m, n, k większych od 1.

Rozstrzygnąć, czy:
a) takie rozwiązania nie istnieją,
b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

323. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d, e, f spełniają równania

$$a+b+c+d+e+f=6$$

oraz

$$ab+bc+cd+de+ef+fa+ad+be+cf+$$

$$+abc+bcd+cde+def+efa+fab+ace+bdf=17\,.$$

Dowieść, że

$$a^2+c^2+e^2=b^2+d^2+f^2\,.$$

324. Interesują nas takie pary liczb naturalnych (m,n), że $3<m<n$, a ponadto liczba przekątnych n-kąta wypukłego jest dwukrotnie większa od liczby przekątnych m-kąta wypukłego.

Rozstrzygnąć, czy:
a) takie pary (m,n) nie istnieją,
b) takie pary (m,n) istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich par (m,n) jest nieskończenie wiele.

325. Rozwiązać równanie

$$4x^4y+4xy^4=4x^2+4y^2+x^8+y^8$$

w liczbach rzeczywistych x, y.

326. Rozstrzygnąć prawdziwość następującego zdania:
Spośród dowolnych 35 różnych liczb naturalnych można wybrać takie trzy różne liczby a, b, c, że liczba $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ jest podzielna przez 17.

327. Rozstrzygnąć prawdziwość następującego zdania:
Spośród dowolnych 34 różnych liczb naturalnych można wybrać takie trzy różne liczby a, b, c, że liczba $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ jest podzielna przez 17.

328. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n>1$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{\binom{n^2}{n}}<\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\,.$$

329. Interesują nas rozwiązania równania $13\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+2}$ w liczbach całkowitych nieujemnych n, k spełniających nierówność $k+2\leqslant n$.
Rozstrzygnąć, czy:
a) takie rozwiązania nie istnieją,
b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

330. Interesują nas rozwiązania równania $100\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+2}$ w liczbach całkowitych nieujemnych n, k spełniających nierówność $k+2\leqslant n$.
Rozstrzygnąć, czy:
a) takie rozwiązania nie istnieją,
b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

331. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p dającej przy dzieleniu przez 8 resztę 1, istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, że liczba a^4+b^4 jest podzielna przez p i mniejsza od $2p^2$.

332. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie A, B, C, D, że równanie

$$A\cdot x^6+B\cdot y^6+C\cdot z^6+D\cdot t^6=1$$

nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych dodatnich x, y, z, t.

333. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie A, B, C, D, że równanie

$$A\cdot x^6+B\cdot y^6+C\cdot z^6+D\cdot t^6=1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach wymiernych dodatnich x, y, z, t.