601. Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b niepodzielne przez p, że liczba $a+b$ jest niepodzielna przez p^2. Dowieść, że liczba a^p+b^p jest niepodzielna przez p^3.

602. Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, że liczba

$$a^{p^p}+b^{p^p}$$

jest podzielna przez p. Dowieść, że jest ona podzielna przez p^{p+1}.

603. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, c, że liczba

$$a^{p^2}+b^{p^2}+c^{p^2}$$

jest podzielna przez p^3. Dowieść, że wówczas liczba

$$a^p+b^p+c^p$$

jest podzielna przez p^2.

604. Dana jest liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita a, że

$$a \not\equiv 1 \pmod{p}$$

oraz

$$a^3 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej k zachodzi kongruencja

$$(a+1)^{p^k} \equiv a^{p^k}+1 \left(\operatorname{mod} p^{k+1}\right).$$

605. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, c niepodzielne przez p, że

$$a^p+b^p \equiv c^p \left(\operatorname{mod} p^2\right).$$

Dowieść, że wówczas istnieje taka liczba całkowita d, że

$$(d+1)^p \equiv d^p+1 \left(\operatorname{mod} p^2\right),$$

a przy tym liczby d i $d+1$ są niepodzielne przez p.

606. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, c niepodzielne przez p, że

$$a^7+b^7 \equiv c^7 \pmod{p}.$$

Dowieść, że wówczas istnieją dwie kolejne niezerowe reszty siódmego stopnia modulo p.

607. Dowieść, że dla każdej liczby pierwszej $p>7$ istnieje niezerowa reszta kwadratowa modulo p, po której następuje niezerowa reszta sześcienna modulo p.

608. Dowieść, że dla każdej odpowiednio dużej liczby pierwszej p istnieje niezerowa reszta sześcienna modulo p różna od 8, po której następuje niezerowa reszta kwadratowa modulo p.

609. Dowieść, że dla każdej liczby pierwszej $p>13$ istnieje para kolejnych niezerowych reszt sześciennych modulo p.

610. Dowieść, że dla każdej liczby pierwszej $p>17$ istnieje trójka kolejnych niezerowych reszt kwadratowych modulo p.