611. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, które można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych dodatnich.

612. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x^3-9y^2+27y-27 &= 0 \\ y^3-9z^2+27z-27 &= 0 \\ z^3-9x^2+27x-27 &= 0 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

613. Ciąg (a_n) jest określony wzorami

$$a_1=1, \qquad a_2=4, \qquad a_3=15, \qquad a_n=15a_{n-2}-4a_{n-3} \quad \text{dla} \quad n\geqslant 4\,.$$

Dowieść, że jeżeli liczba a_n jest pierwsza, to liczba n też jest pierwsza.

614. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $n^{n^3}-n^n$ nie jest podzielna przez 5.

615. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $n^{n^7}-n^n$ nie jest podzielna przez 43.

616. Dowieść, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p liczba

$$1^{3p}+2^{3p}+3^{3p}+\ldots+(p-1)^{3p}$$

jest podzielna przez p^3.

617. Liczby całkowite a, b, c, x, y, z spełniają równanie

$$a^6+b^6+c^6=x^6+y^6+z^6\,.$$

Dowieść, że liczba

$$a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2$$

jest podzielna przez 180.

618. Zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 333\}$ podzielono na trzy rozłączne zbiory. Dowieść, że istnieją takie liczby n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 (niekoniecznie różne) należące do jednego z tych zbiorów, że

$$n_{i+3}=n_i+n_{i+1} \quad \text{dla} \quad i=1,2,3\,.$$

619. Dowieść, że dla każdej odpowiednio dużej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna $m<n$, że w zapisie dziesiętnym liczby mn nie występuje cyfra 5.

620. Liczba naturalna $n>1$ oraz liczba pierwsza p spełniają następujące warunki:
- liczba $p-1$ jest podzielna przez n,
- liczba n^3-1 jest podzielna przez p.

Dowieść, że liczba $4p-3$ jest kwadratem liczby całkowitej.