621. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Dowieść, że dla dowolnych permutacji $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$ oraz $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_p$ zbioru $\{1,2,3,\ldots,p\}$ pewne dwa spośród iloczynów a_1b_1, a_2b_2, ..., a_pb_p dają tę samą resztę przy dzieleniu przez p.

622. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n o następującej własności:
Istnieje n-elementowy podzbiór zbioru $\{1,2,3,\ldots,1000\}$, w którym żadne dwie liczby nie różnią się o 4, o 5 ani o 9.

623. Liczby rzeczywiste dodatnie a i b spełniają warunek

$$a^3+b^3=a^5+b^5\,.$$

Dowieść, że

$$a^2+b^2\leqslant 1+ab\,.$$

624. Znaleźć trójkę a, b, c liczb rzeczywistych dodatnich o sumie 1 spełniającą następujący warunek:
Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$a\cdot\frac{x^3}{y^2}+b\cdot\frac{y^3}{z^2}+c\cdot\frac{z^3}{x^2}\geqslant x\,.$$

625. Dowieść, że dla każdej naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{4\cdot\sqrt[5]{5\cdot\ldots\cdot\sqrt[n-1]{(n-1)\cdot\sqrt[n]{n}}}}}}<2\,.$$

626. Liczby p i $p+2$ są pierwsze. Dowieść, że istnieją kolejne liczby naturalne (więcej niż jedna), których iloczyn daje przy dzieleniu przez p^2+2p resztę p^2+p-1.

627. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{a^3}{b+c}}+\sqrt{\frac{b^3}{c+d}}+\sqrt{\frac{c^3}{d+a}}+\sqrt{\frac{d^3}{a+b}}\geqslant\frac{a+b+c+d}{\sqrt{2}}\,.$$

628. Wyznaczyć największą liczbę naturalną k o następującej własności:
Ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,2003\}$ można tak wybrać k par liczb, że
- wybrane pary zwierają $2k$ różnych liczb,
- sumy liczb w wybranych parach są różne i nie przekraczają 2003.

629. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu xyz dla trójek liczb rzeczywistych x, y, z różnych od ±1 i spełniających warunki

$$xy+yz+zx=1 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=0\,.$$

630. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $5ab+3bc+4ac$ dla trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c spełniających warunki

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 9\,, \\ 5a^2+5c^2+6ac = 80\,, \\ 5b^2+5c^2+8bc = 125\,. \end{cases}$$