631. Liczby naturalne n_0, n_1, n_2, ..., n_{28} spełniają równanie

$$n_0^{15}=n_1^{15}+n_1^{15}+\ldots+n_{28}^{15}\,.$$

Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb n_0, n_1, n_2, ..., n_{28} jest podzielna przez 31.

632. Wyznacz najmniejszą liczbę nieparzystą $n>1$ o następującej własności: istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, których kwadraty są równe sumom kwadratów n kolejnych liczb naturalnych.

633. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^a+b^b>ab\,.$$

634. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej a zachodzi nierówność

$$a^{a^2}+a^{2a}>1\,.$$

635. Liczby całkowite dodatnie n_1, n_2, ..., n_{1000}, m spełniają równanie

$$n_1^{256}+n_2^{256}+n_3^{256}+\ldots+n_{1000}^{256}=m^{256}\,.$$

Udowodnij, że

$$m>10^{74}\,.$$

636. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1. Udowodnij, że spośród liczb

$$n^2+1,\ n^2+2,\ n^2+3,\ \ldots,\ n^2+2n$$

można wybrać takie trzy różne liczby a, b, c, że liczba a^2+b^2 jest podzielna przez c.

637. Udowodnij, że równanie

$$a^3+b^3+2=c^3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych a, b, c.

638. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63cda}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63dab}}+\frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}}\geqslant 1\,.$$

639. Udowodnij istnienie takiej funkcji $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, że

$$(\underbrace{f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{2019 razy}})(x)=1+x+2\sqrt{x}$$

dla każdego $x\geqslant 0$.

640. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ciąg (a_n) o wyrazach naturalnych, że żadna liczba postaci

$$a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}+\ldots+a_{n_k}, \qquad \text{gdzie } k\geqslant 1,\ \ n_1<n_2<n_3<\ldots<n_k\,,$$

nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym większym od 1.