641. Mamy 1000 monet, z których każda jest prawdziwa (waży 10 gramów) albo fałszywa (waży 9 gramów). Nie wiemy, ile monet jest prawdziwych, a ile fałszywych. Dysponujemy wagą elektroniczną, na której można umieścić dowolną liczbę monet i odczytać ich łączny ciężar. Czy wykonując 100 ważeń można rozpoznać, które monety są fałszywe, a które prawdziwe?

642. Dowieść, że wśród dowolnych 11 kolejnych wyrazów ciągu

$$a_n = n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1 \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

jest co najmniej 10 liczb złożonych.

643. Dowieść, że wśród dowolnych 2021 kolejnych wyrazów ciągu

$$a_n = n^6 + 209 \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

jest co najmniej 2000 liczb złożonych.

644. Każdy z wierzchołków 2019-kąta foremnego pokolorowano na jeden z 10 kolorów. Okazało się, że wśród dowolnych 100 kolejnych wierzchołków występują wszystkie kolory. Dowieść, że wśród pewnych 90 kolejnych wierzchołków występują wszystkie kolory.

645. Funkcja rosnąca $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$, spełnia dla dowolnych liczb $m,n\in\mathbb{N}$ warunek

$$f(mn) = f(m)\cdot f(n)\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(2)>2$. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość $f(3)$?

646. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki nieograniczony rosnący ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n spełniona jest równość

$$[a_n + a_{n+1} + a_{n+2}] = [a_{9n+8}]\,.$$

647. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieją liczby całkowite dodatnie $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ spełniające równość

$$\frac{1}{3a_1-1} + \frac{1}{3a_2-1} + \frac{1}{3a_3-1} + \ldots + \frac{1}{3a_n-1} = 1\,.$$

648. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb naturalnych, z których każda jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich.

649. Czy istnieją takie cztery różne liczby całkowite a, b, c, d, że

$$a+b+c+d = a^3+b^3+c^3+d^3 = 2\ ?$$

650. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, e, f, że

$$a^k + b^k = c^k + d^k + e^k + f^k \qquad \text{dla } k = 1,2,3.$$