

661. Niech n będzie liczbą naturalną. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć suma cyfr dodatniej wielokrotności liczby $10^n - 1$?

662. Dowieść, że z każdego ciągu 1000 różnych liczb rzeczywistych można wybrać 28-wyrazowy podciąg rosnący lub 38-wyrazowy podciąg malejący.

663. Rozstrzygnąć, czy sześcian o krawędzi 100 można podzielić na prostopadłościany o wymiarach $1 \times 1 \times 51$ i $1 \times 1 \times 53$.

664. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Dowieść, że

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq \sqrt{a^4 + b^4 + c^4}.$$

665. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\text{NWD}(5^{2^n} + 1, 26^{2^n} + 1, 65^{2^n} + 1) \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}.$$

666. Liczby całkowite a_1, a_2, \dots, a_{666} spełniają nierówności

$$\sum_{i=1}^{666} a_i \geq 666, \quad \sum_{i=1}^{666} a_i^2 \leq 1554, \quad \sum_{i=1}^{666} a_i^3 \geq 6 \cdot 666.$$

Dowieść, że

$$\sum_{i=1}^{666} a_i^4 \geq 10878.$$

667. Na potrzeby tego zadania dyskretną pochodną permutacji (a_1, a_2, \dots, a_n) zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ nazwiemy ciąg (b_1, b_2, \dots, b_n) liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, gdzie

$$b_i \equiv a_{i+1} - a_i \pmod{n+1}$$

przy cyklicznym numerowaniu $a_{n+1} = a_1$.

Permutację zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ nazwiemy idealną, jeśli jej dyskretna pochodna też jest permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Liczbę n nazwiemy idealną, jeśli istnieje idealna permutacja zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dowieść, że istnieje zarówno nieskończenie wiele liczb idealnych jak i nieskończenie wiele liczb, które nie są idealne.

668. Jakie reszty przy dzieleniu przez 7 mogą dawać liczby

$$\binom{3n}{n} \cdot \binom{2n}{n},$$

gdzie n jest liczbą naturalną?

669. Wyznaczyć największą taką stałą C , że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$n\sqrt{7} \cdot \{n\sqrt{7}\} > C. \quad \{x\} \text{ to część ułamkowa } x$$

670. Wyznaczyć największą taką stałą D , że dowolne liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniające nierówność

$$Dabc > a^3 + b^3 + c^3$$

są długościami boków trójkąta.