671. Wyznaczyć zbiór wartości ilorazu

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)\cdot abc}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3},$$

gdzie (a,b,c) przebiegają wszystkie trójki liczb rzeczywistych dodatnich.

672. Dane są liczby rzeczywiste dodatnie a i b. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia $n<10^{2019}$, że każda z liczb na oraz nb ma po przecinku 1000 jednakowych cyfr.

673. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby $\sum\limits_{k=1}^{p^2-p} k^k$ przez p.

674. Zabezpieczenie sejfu składa się z trzech kół, z których każde może być ustawione w jednej z ośmiu pozycji. Z powodu uszkodzenia mechanizmu blokujacego sejf, drzwiczki do sejfu można otworzyć, gdy dowolne dwa koła znajdują się w prawidłowej pozycji. Wyznaczyć najmniejszą liczbę prób, która gwarantuje otworzenie sejfu.

675. W każde pole kwadratowej szachownicy o boku 2019 wpisano liczbę rzeczywistą o module mniejszym od 1. Okazało się, że suma liczb w każdym 4-polowym kwadracie 2×2 jest równa 0. Dowieść, że suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest mniejsza od 2019.

676. Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną. Definiujemy $a_n=n^2+k$. Wyznaczyć największą możliwą wartość $\mathrm{NWD}(a_n, a_{n+1})$, gdzie n przebiega liczby naturalne.

677. Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną. Definiujemy $b_n=n^3+k$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\mathrm{NWD}(b_n, b_{n+1})$ jest dzielnikiem liczby $27k^2+1$.

678. Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $a_n=n^2+k$ oraz $b_n=n^3+k$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\mathrm{NWD}(a_n, b_{n+1})$ jest dzielnikiem liczby k^3-2k^2+5k+1.

679. Znaleźć odpowiedni wielomian trzeciego stopnia $W(x)$ o współczynnikach całkowitych i rozwiązać następujące zadanie: Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną. Definiujemy $a_n=n^2+k$ oraz $b_n=n^3+k$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\mathrm{NWD}(b_n, a_{n+1})$ jest dzielnikiem liczby $W(k)$.

680. Niech $W(x)$ będzie wielomianem dziesiątego stopnia o współczynnikach całkowitych, w którym współczynnik przy x^{10} jest równy 1. Rozstrzygnąć, czy liczby

$$W(0), W(1), W(2), \ldots, W(100)$$

mogą dawać parami różne reszty przy dzieleniu przez 101.