681. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że suma cyfr liczby 2^n jest większa od sumy cyfr liczby 2^{n+1}.

682. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ liczba $2^{2^n}+1$ ma dzielnik pierwszy większy od $(n+2)\cdot 2^{n+4}$.

683. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n spełniających warunek $n|2^n+1$.

684. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby naturalne m i n spełniające warunki $n|2^n+1$ oraz $m|2^m+1$, że żadna nie jest dzielnikiem drugiej.

685. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie parami względnie pierwsze liczby naturalne a, b, c większe od 1, że

$$a|2^b+1, \qquad b|2^c+1, \qquad c|2^a+1\,.$$

686. Na potrzeby tego zadania skończony zbiór złożony z liczb naturalnych nazwiemy *potężnym*, jeżeli każdy jego niepusty podzbiór ma sumę elementów będącą potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym od 1. Jak dużo elementów może mieć zbiór potężny?

687. Dana jest liczba pierwsza $p\equiv 7 \pmod 8$. Dowieść, że liczba $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{(p+1)/2}$ jest podzielna przez p^2.

688. Dana jest liczba pierwsza $p\equiv 3 \pmod 8$. Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{(p+1)/2}$ przez p^2.

689. Dana jest liczba pierwsza $p\equiv 7 \pmod 8$. Dowieść, że licznik sumy $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k^{(p-3)/2}}$ jest podzielny przez p^2.

690. Dana jest liczba pierwsza $p\equiv 7 \pmod 8$. Niech w będzie jedną z czterech liczb $\frac{p+1\pm(p-1)(p\pm1)}{2}$, gdzie oba znaki "$\pm$" są wybierane niezależnie. Dowieść, że licznik sumy $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^w$ jest podzielny przez p^3.