

12. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, d , że

$$a^3 + b^4 + c^5 = d^4.$$

13. Udowodnij istnienie nieskończenie wielu takich trójek liczb całkowitych dodatnich a, b, c , że

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

a ponadto $\text{NWD}(a, b, c) = 1$.

Wskazówka: Przyjmij $a = x - y$ oraz $c = x + y$, a następnie podstaw za x oraz y odpowiednie wyrażenia.

14. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, d , że

$$a^3 + b^4 + c^5 = d^4,$$

a ponadto $\text{NWD}(a, b, c, d) = 1$.

Wskazówka: Przyjmij $b = x - 1$ oraz $d = x + 1$, a następnie podstaw za x odpowiednią liczbę.

15. Znajdź takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, d , że

$$a^4 + b^5 + c^7 = d^4,$$

a ponadto $\text{NWD}(a, b, c, d) = 1$.

16. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^8 + b^{24} + c^{25} + d^{48} + e^{49} = f^8$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d, e, f spełniających warunek $\text{NWD}(a, b, c, d, e, f) = 1$.

17. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n < 105$, że liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 105?

18. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n < 91$, że liczba $n^3 - 1$ jest podzielna przez 91?

19. Udowodnij, że istnieje 2020 kolejnych liczb złożonych.

20. Udowodnij, że istnieje 2020 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma co najmniej 2020 różnych dzielników pierwszych.

21. Udowodnij, że istnieje 2020 kolejnych liczb naturalnych, z których każda jest podzielna przez 2020-tą potęgę pewnej liczby pierwszej.

22. Udowodnij, że istnieje 2020 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma dzielnik pierwszy postaci $4k + 3$ występujący w jej rozkładzie na czynniki pierwsze w pierwszej potęgę.

23. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych dających przy dzieleniu przez 6 resztę 5.

24. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p , że liczby $p \pm k$ są złożone dla $k = 1, 2, 3, \dots, 2020$.

W tym (i tylko w tym) zadaniu wolno skorzystać bez dowodu z twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w postępach arytmetycznych:

Każdy rosnący postęp arytmetyczny o wyrazach naturalnych, w którym różnica postępu jest względnie pierwsza z początkowym wyrazem, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.