

25. Wykaż, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n , dla której liczba $(54n)!$ jest podzielna przez liczbę $(56!)^n$.

26. Liczbę pierwszą nazwiemy *klawą*, jeżeli jest dzielnikiem liczby

$$n^{16} + 16n + 1$$

dla pewnej liczby naturalnej n . Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb *klawych*.

27. Komisja Finansowa liczy sześć osób, w tym przewodniczący. Należy zamontować w skarbcu jak najmniejszą liczbę zamków i rozdać klucze członkom komisji tak, aby spełnione były następujące warunki:

- każdego z czterech członków KF może otworzyć skarbiec,
- żadnych dwóch członków KF nie może otworzyć skarbcu,
- trzech członków KF może otworzyć skarbiec wtedy i tylko wtedy, gdy wśród nich jest przewodniczący.

Wyznacz liczbę zamków, które należy zamontować w skarbcu.

28. Udowodnij, że liczba

$$81^9 + 36^9 + 16^9$$

jest złożona.

29. Udowodnij, że istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, że dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ liczby

$$a_1^k + a_2^k + a_3^k + a_4^k + a_5^k + a_6^k + a_7^k$$

są podzielne przez p , ale liczba

$$a_1^7 + a_2^7 + a_3^7 + a_4^7 + a_5^7 + a_6^7 + a_7^7$$

nie jest podzielna przez p .

30. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają nierówności

$$x + y + z \geq 6, \quad xy + yz + zx \geq 11, \quad xyz \leq 6.$$

Udowodnij, że

$$x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + y^2x + z^2y \geq 48.$$

31. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b i c , że liczby $a + b + c$ oraz $a^4 + b^4 + c^4$ są podzielne przez p , ale liczba $a^{16} + b^{16} + c^{16}$ nie jest podzielna przez p .

32. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, że

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 7.$$

Wykaż, że istnieje permutacja

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$$

liczb

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7),$$

dla której spełniona jest nierówność

$$b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_4 + b_4b_5 + b_5b_6 + b_6b_7 + b_7b_1 \leq 7.$$