33. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, że

$$a \equiv b \pmod{p}.$$

Dowieść, że

$$a^p \equiv b^p \left(\bmod\ p^2\right).$$

34. Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b niepodzielne przez p, że liczba $a+b$ jest niepodzielna przez p^2. Dowieść, że liczba a^p+b^p jest niepodzielna przez p^3.

35. Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, że liczba

$$a^{p^p}+b^{p^p}$$

jest podzielna przez p. Dowieść, że jest ona podzielna przez p^{p+1}.

36. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, c, że liczba

$$a^{p^2}+b^{p^2}+c^{p^2}$$

jest podzielna przez p^3. Dowieść, że wówczas liczba

$$a^p+b^p+c^p$$

jest podzielna przez p^2.

37. Dana jest liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita a, że

$$a \not\equiv 1 \pmod{p}$$

oraz

$$a^3 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej k zachodzi kongruencja

$$(a+1)^{p^k} \equiv a^{p^k}+1 \left(\bmod\ p^{k+1}\right).$$

38. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, c niepodzielne przez p, że

$$a^p+b^p \equiv c^p \left(\bmod\ p^2\right).$$

Dowieść, że wówczas istnieje taka liczba całkowita d, że

$$(d+1)^p \equiv d^p+1 \left(\bmod\ p^2\right),$$

a przy tym liczby d i $d+1$ są niepodzielne przez p.

39. Liczby naturalne n_0, n_1, n_2, ..., n_{28} spełniają równanie

$$n_0^{15}=n_1^{15}+n_1^{15}+\ldots+n_{28}^{15}.$$

Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb n_0, n_1, n_2, ..., n_{28} jest podzielna przez 31.

40. Liczby całkowite dodatnie n_1, n_2, ..., n_{1000}, m spełniają równanie

$$n_1^{256}+n_2^{256}+n_3^{256}+\ldots+n_{1000}^{256}=m^{256}.$$

Udowodnij, że

$$m>10^{74}.$$