

67. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba $\left\lfloor \frac{n^2}{5} \right\rfloor$ jest pierwsza.

68. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba $\left\lfloor \frac{n^3}{9} \right\rfloor$ jest pierwsza.

69. Udowodnij, że wśród liczb postaci $n^4 + 44$, gdzie n przebiega liczby całkowite od 1 do 2021 jest co najmniej 1950 liczb złożonych.

70. Udowodnij, że wśród liczb postaci $n^{44} + 4$, gdzie n przebiega liczby całkowite od 1 do 2021 jest co najmniej 1950 liczb złożonych.

71. Oblicz

$$\sum_{n=1}^{2024} \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}}.$$

72. Rozstrzygnij, czy każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w postaci

$$\frac{a^3 + b^5}{c^2 + d^7},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi.

73. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których istnieją liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = a_1$ spełniające warunki

$$a_i^2 + a_{i+1}^2 + 50 = 16a_i + 12a_{i+1}$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$.

74. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoramienny o wierzchołkach tego samego koloru.

75. Dany jest 2020-kąt foremny. Rozważamy wszystkie trójkąty o wierzchołkach będących wierzchołkami danego 2020-kąta. Których trójkątów jest więcej: ostrokątnych czy rozwartokątnych i ile razy więcej?

76. Czy w sześciennym pudełku o krawędzi 4 można umieścić 65 kul o średnicy 1?

77. Oblicz $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

78. Oblicz¹ $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k+r}$ w zależności od n oraz $r \in \{0, 1, 2\}$.

79. Oblicz $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k+r}$ w zależności od n oraz $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

80. Oblicz $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{6k+r}$ w zależności od n oraz $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

¹Przyjmujemy $\binom{n}{k} = 0$ dla $k > n$.