

**81.** Potęgą nazwiemy każdą liczbę postaci  $a^b$ , gdzie  $a, b$  są liczbami całkowitymi dodatnimi, a przy tym  $b > 1$ .

Rozstrzygnij, czy istnieje rozwiązanie równania

$$x^5 \cdot y^6 = z^7$$

w liczby całkowitych dodatnich  $x, y, z$  niebędących potęgami.

**82.** Udowodnij nierówności

$$n^{2000^{11}} < 2^n < n^{2222^{11}}$$

dla wskazanej przez siebie liczby naturalnej  $n$

**83.** Rozwiąż równanie

$$x = 2 \cdot [x] \cdot \{x\}$$

w liczbach rzeczywistych dodatnich  $x$ .

**Uwaga:**  $[x]$  oraz  $\{x\}$  oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby  $x$ .

**84.** Liczby pierwsze  $p, q, r$  spełniają nierówności

$$p^3 < q^7, \quad p^2 < r^3.$$

Udowodnij, że  $p < qr$ .

**85.** Liczby pierwsze  $p, q, r$  spełniają nierówności

$$p^7 < q^3, \quad pq^2 < r^9.$$

Udowodnij, że  $p^5 < r^8$ .

**86.** Liczby rzeczywiste dodatnie  $a, b, c, d, e, f$  spełniają równania

$$a + b + c + d + e + f = 6$$

oraz

$$\begin{aligned} & ab + bc + cd + de + ef + fa + ad + be + cf + \\ & + abc + bcd + cde + def + efa + fab + ace + bdf = 17. \end{aligned}$$

Udowodnij, że

$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2.$$

**87.** Wskaż odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie  $s$  oraz  $t$ , a następnie udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich  $a, b, c$  zachodzą nierówności

$$(abc)^s \leq \text{NWD}(a, b, c) \cdot \text{NWW}(a, b, c) \leq (abc)^t$$

oraz wykaż, że wskazane liczby  $s, t$  są optymalne, tzn. liczby  $s$  nie można zastąpić większą, a liczby  $t$  mniejszą.

**88.** Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie  $d$ , dla których prawdziwe jest następujące zdanie:

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$ , jeżeli liczba  $n^4$  jest podzielna przez  $d$ , to liczba  $n^3$  jest podzielna przez  $d$ .

**89.** Interesują nas liczby całkowite dodatnie  $n$  o następujących własnościach:

- (i) liczba  $n$  w zapisie dziesiętnym ma parzystą liczbę cyfr (przyjmujemy, że zapis dziesiętny liczby naturalnej nie może zaczynać się od cyfry 0), oznaczmy tę liczbę cyfr przez  $2k$ ,  
(ii) jeżeli podzielimy liczbę  $n$  na dwie grupy  $k$ -cyfrowe, a następnie zamienimy te grupy miejscami, to powstanie liczba większa od  $n$  będąca wielokrotnością liczby  $n$ .

Rozstrzygnij, czy:

- a) takie liczby nie istnieją,  
b) takie liczby istnieją, ale jest ich skończenie wiele,  
c) takich liczb jest nieskończenie wiele.

**90.** Rozwiąż równanie

$$4x^4y + 4xy^4 = 4x^2 + 4y^2 + x^8 + y^8$$

w liczbach rzeczywistych  $x, y$ .

**91.** Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $k > 1$ , dla których równanie

$$(m^m)^k = n^n$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych  $m, n$  większych od 1.

**92.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$  spełniających warunki

$$\sum_{k=1}^9 x_k^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^9 kx_k = 17$$

zachodzą nierówności

$$\frac{1}{11} < \sum_{k=1}^9 x_k^k < \frac{1}{10}.$$

**93.** Interesują nas rozwiązania równania

$$m^{m^{2021}} = n^{n^k}$$

w liczbach naturalnych  $m, n, k$  większych od 2021.

Rozstrzygnij, czy:

- a) takie rozwiązania nie istnieją,  
b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,  
c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

**PRZYPOMNIENIE:** Potęgowanie wykonujemy **od góry**:  $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ .

**94.** Interesują nas pary liczb całkowitych dodatnich  $(m, n)$  o następującej własności: Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $k$ , jeżeli liczba  $k$  jest podzielna przez  $m$  i jest podzielna przez  $n$ , to jest także podzielna przez  $m+n$ .

Rozstrzygnij, czy:

- a) takie pary nie istnieją,  
b) takie pary istnieją, ale jest ich skończenie wiele,  
c) takich par jest nieskończenie wiele.

**95.** Interesują nas takie trójki liczb całkowitych dodatnich  $(p, q, r)$ , że

$$\text{NWD}(p, q, r) = 1,$$

a ponadto spełniona jest następująca własność:

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$ , jeżeli liczba  $n$  jest podzielna przez  $p$ , jest podzielna przez  $q$  i jest podzielna przez  $r$ , to jest także podzielna przez  $p+q+r$ .

Rozstrzygnij, czy:

- a) takie trójki nie istnieją,
- b) takie trójki istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
- c) takich trójek jest nieskończenie wiele.

**96.** Dany jest taki wielomian  $W(x)$  stopnia  $2^{16}$  o współczynnikach rzeczywistych, że  $W(n) = 2^n$  dla  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^{16}$ . Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna  $m > 2^{16}$ , że  $W(m)$  jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym dodatnim.

**97.** Dana jest taka liczba pierwsza  $p$  oraz liczby całkowite  $a, b, c, d$ , że liczby

$$a+b+c+d \quad \text{oraz} \quad a^2+b^2+c^2+d^2$$

są podzielne przez  $p$ . Udowodnij, że liczba

$$a^5+b^5+c^5+d^5$$

też jest podzielna przez  $p$ .

**98.** Podaj przykład takiej liczby pierwszej  $p$  oraz liczb całkowitych  $a, b, c, d, e$ , że liczby

$$a+b+c+d+e \quad \text{oraz} \quad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$

są podzielne przez  $p$ , ale liczba

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5$$

nie jest podzielna przez  $p$ .

**99.** Dana jest taka liczba pierwsza  $p$  oraz liczby całkowite  $a, b, c, d, e$ , że liczby

$$a+b+c+d+e \quad \text{oraz} \quad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$

są podzielne przez  $p$ , ale liczba

$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3$$

nie jest podzielna przez  $p$ . Udowodnij, że liczba

$$a^6+b^6+c^6+d^6+e^6$$

nie jest podzielna przez  $p$ .

**100.** Podaj przykład takiej liczby pierwszej  $p$  oraz liczb całkowitych  $a, b, c, d, e, f$ , że liczby

$$a+b+c+d+e+f \quad \text{oraz} \quad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$$

są podzielne przez  $p$ , liczba

$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3$$

nie jest podzielna przez  $p$ , a liczba

$$a^6+b^6+c^6+d^6+e^6+f^6$$

jest podzielna przez  $p$ .