1. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech $0<k<p$. Udowodnić, że liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p.

3. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech a, b będą liczbami całkowitymi. Dowieść, że

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}\,.$$

5. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^p \equiv a \pmod{p}\,.$$

7. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a oraz dowolnej liczby naturalnej k

$$a^{k(p-1)+1} \equiv a \pmod{p}\,.$$

9. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^{561} \equiv a \pmod{561}\,.$$

11. Wskazać dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{22}-2^{22}$.

13. Wskazać dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{16}-2^{16}$.

15. Wskazać dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $13^{46}-2^{46}$.

17. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{88}-2^{88}$.

19. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{66}-2^{66}$.

21. Wskazać cztery dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{210}-1$.

23. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $51^{22}-2^{44}$.

25. Wskazać pięć dwucyfrowych dzielników pierwszych liczby $3^{180}-2^{120}$.

27. Udowodnić, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że

$$n^n \equiv (n+1)^{n+1} \pmod{p}\,.$$

29. Niech k będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczby $6k+1$, $12k+1$, $18k+1$ są pierwsze. Udowodnić, że liczba

$$n=(6k+1)\cdot(12k+1)\cdot(18k+1)$$

jest liczbą Carmichaela, tzn. dla każdej liczby całkowitej a zachodzi

$$a^n \equiv a \pmod{n}\,.$$

31. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<55$, że $n^3 \equiv 2 \pmod{55}$.

33. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<91$, że $n^5 \equiv 2 \pmod{91}$.

35. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<4141$, że $n^{67} \equiv 3 \pmod{4141}$.

37. Liczba pierwsza p, liczba naturalna k oraz liczby całkowite a, b spełniają warunek $a\equiv b \pmod{p^k}$. Dowieść, że $a^p \equiv b^p \pmod{p^{k+1}}$.

39. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi przystawanie

$$a^{p^2-p} \equiv 1 \pmod{p^2}\,.$$

41. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby 2^p-1 daje przy dzieleniu przez p resztę 1.

43. Dowieść, że liczba 127 jest pierwsza nie wykonując żadnego dzielenia tej liczby przez mniejsze liczby.

45. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby 2^p+1 różny od 3 daje przy dzieleniu przez p resztę 1.

47. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych zakończonych cyfrą 1.

49. Niech k będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby $2^{2^k}+1$ daje przy dzieleniu przez 2^{k+1} resztę 1.

51. Udowodnij, że istnieje potęga dwójki, której 2023-cyfrowa końcówka zawiera tylko cyfry 4 i 8.

53. Udowodnij, że istnieje potęga dwójki, której zapis dziesiętny zaczyna się 2023 ósemkami.

55. Udowodnij, że istnieje potęga dwójki spełniająca warunki obu poprzednich zadań jednocześnie.

57. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2bc+b^2ca+c^2ab \leqslant a^3b+b^3c+c^3a\,.$$

59. Udowodnij, że równanie

$$3^k=m^2+n^2+1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich k, m, n.

61. Udowodnij istnienie takiej rosnącej funkcji $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, że dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(f(x))=x^2+2x\,.$$

To samo pytanie z dodatkowym warunkiem $f(1)=a$, gdzie $a\in(1,3)$.

63. Udowodnij istnienie nieskończenie wielu par różnych liczb pierwszych (p,q) spełniających warunki:
- liczba $2^{p-1}-1$ jest podzielna przez q,
- liczba $2^{q-1}-1$ jest podzielna przez p.

65. Udowodnij, że na kwadratowej szachownicy o boku 50 można tak wybrać 333 pola, aby środki żadnych czterech wybranych pól nie wyznaczały prostokąta o bokach równoległych do boków szachownicy.

67. Na kwadratowej szachownicy o boku 50 wybrano 376 pól. Udowodnij, że środki pewnych czterech wybranych pól wyznaczają prostokąt o bokach równoległych do boków szachownicy.