102. Na płaszczyźnie zaznaczono 5 punktów kratowych. Dowieść, że można wybrać takie dwa z nich, że na odcinku, który je łączy, znajduje się jeszcze co najmniej jeden punkt kratowy.
Uwaga: Punktem kratowym nazywamy punkt o obu współrzędnych całkowitych.

104. Na płaszczyźnie zaznaczono 10 punktów kratowych. Dowieść, że można wybrać takie dwa z nich, że na odcinku, który je łączy, znajdują się jeszcze co najmniej dwa punkty kratowe.

106. Ciąg Fibonacciego (F_n) jest zdefiniowany wzorami

$$F_1=F_2=1 \quad \text{oraz} \quad F_{n+2}=F_n+F_{n+1} \text{ dla } n=1,2,3,\ldots$$

Dowieść, że ciąg 1,1,2,3,5,8,3,1,4,5,9,4,3,... złożony z cyfr jedności kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego jest okresowy.

108. Wewnątrz kwadratu o boku 10 wybrano 101 punktów. Dowieść, że pewne dwa z tych punktów są odległe o mniej niż 3/2.

110. Wewnątrz kwadratu o boku 12 wybrano 290 punktów. Dowieść, że pewne dwa z tych punktów są odległe o mniej niż 1. To samo pytanie dla 215 punktów.

112. Czy dowolny zbiór złożony z $n-1$ liczb całkowitych zawiera niepusty podzbiór o sumie podzielnej przez n ?

114. Czy dowolny zbiór złożony z n liczb całkowitych zawiera niepusty podzbiór o sumie podzielnej przez n ?

116. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie, których pewna dodatnia wielokrotność ma w zapisie dziesiętnym same jedynki.

118. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x istnieje taka liczba całkowita dodatnia $n \leqslant 1000$, że liczba nx zapisana w zapisie dziesiętnym ma bezpośrednio po przecinku trzy zera lub trzy dziewiątki.

120. Dowieść, że istnieje liczba całkowita dodatnia, którą na więcej niż 100 sposobów można przedstawić w postaci $a^2+b^3+c^5$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi dodatnimi.

122. Dowieść, że istnieje 100 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, z których żadnej nie można przedstawić w postaci $a^2+b^3+c^7$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi dodatnimi.

124. Dowieść, że istnieje 100 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, z których żadnej nie można przedstawić w postaci $a^2+b^3+c^7+d^{43}+e^{1807}$, gdzie a, b, c, d, e są liczbami całkowitymi dodatnimi.

126. Dowieść, że istnieje liczba całkowita dodatnia, którą na więcej niż 100 sposobów można przedstawić w postaci $a^2+b^3+c^7+d^{43}+e^{1807}$, gdzie a, b, c, d, e są liczbami całkowitymi dodatnimi.

128. Dowieść, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające równanie

$$a^{2021}+b^{2021}=c^{2022}\,.$$

130. Dowieść, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające równanie

$$a^3+b^4=c^5\,.$$

132. Dowieść, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające równanie

$$a^4+b^5=c^6\,.$$

134. Dowieść, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające równanie

$$a^6+b^8=c^{10}\,.$$

136. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n<105$, że liczba n^2-1 jest podzielna przez 105?

138. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $n<91$, że liczba n^3-1 jest podzielna przez 91?

140. Dowieść, że istnieje 1000 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma co najmniej 1000 różnych dzielników pierwszych.

142. Dwaj gracze grają w następującą grę. Początkowo na tablicy napisana jest jakaś liczba całkowita dodatnia. Dozwolonym ruchem w grze jest odjęcie od napisanej na tablicy liczby jej dzielnika pierwszego lub jedynki – wówczas liczbę napisaną na tablicy zastępuje się wynikiem odejmowania. Gracze wykonują ruchy na przemian. Wygrywa gracz, który napisze na tablicy liczbę 0. Jaka jest strategia w tej grze?

144. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $4k+3$.

146. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $6k+5$.

148. Dowieść, że istnieje 1000 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma dzielnik pierwszy postaci $4k+3$ występujący w jej rozkładzie na czynniki pierwsze w pierwszej potędze.

150. Dowieść, że istnieje bardzo samotna liczba pierwsza, czyli taka, że 1 000 000 kolejnych liczb ją poprzedzających oraz 1 000 000 kolejnych liczb po niej następujących to liczby złożone.
Uwaga: W rozwiązaniu można bez dowodu skorzystać z twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w postępach arytmetycznych: Każdy rosnący postęp arytmetyczny o wyrazach całkowitych dodatnich, w którym wyrazy są względnie pierwsze z różnicą postępu, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

152. Dowieść, że istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma dzielnik pierwszy mniejszy od 60.

154. Wyznacz 1000 cyfr występujących po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\left(5+\sqrt{26}\right)^{1000}$.

156. Wyznacz 1000 cyfr występujących po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\left(5+\sqrt{26}\right)^{1001}$.

158. Czy liczba $7+5\sqrt{2}$ jest sumą kwadratów 2022 liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi?

160. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n, że $\left(7+4\sqrt{2}\right)^m=\left(5+3\sqrt{2}\right)^n$?

162. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n, że $\left(5+3\sqrt{3}\right)^m=\left(2+\sqrt{3}\right)^n$?

164. Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n, że $\left(1+\sqrt{7}\right)^m=\left(4+2\sqrt{7}\right)^n$?

166. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie k, m, n, że

$$\left(1+\sqrt{7}\right)^k=\left(2+\sqrt{7}\right)^m\cdot\left(3+\sqrt{7}\right)^n .$$

168. Udowodnij, że równanie $2m^2+1=n^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

170. Udowodnij, że równanie $2m^2=n^2+1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

172. Udowodnij, że równanie $3m^2+1=n^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

174. Udowodnij, że równanie $3m^2=n^2+1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

176. Udowodnij, że równanie $5m^2+1=n^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

178. Udowodnij, że równanie $5m^2=n^2+1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

180. Udowodnij, że równanie $2m^2+7=n^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

182. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele nieprzystających trójkątów pitagorejskich (prostokątnych o bokach długości całkowitej), w których długości przyprostokątnych różnią się o 1.

184. Interesują nas trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej, w których długość krótszej przyprostokątnej jest połową długości dłuższej przyprostokątnej pomniejszoną o 1.

Rozstrzygnij, czy:

a) takie trójkąty nie istnieją,
b) takie trójkąty istnieją, ale jest ich skończenie wiele (z dokładnością do przystawania),
c) takich trójkątów jest nieskończenie wiele (z dokładnością do przystawania).

186. Wiadomo, że

$$\binom{14}{6}=\binom{15}{5}=3003\,.$$

Czy istnieją inne rozwiązania równania

$$\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k}\ ?$$

188. Wiadomo, że 36 kulek można ułożyć na stole w kwadrat lub w trójkąt równoboczny, mamy bowiem

$$36=6^2=1+2+3+4+5+6+7+8\,.$$

Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich par liczb naturalnych m, n, że

$$m^2=1+2+3+\ldots+n\,.$$

Podaj kilka przykładów takich liczb m i n (oprócz $m=n=1$ i powyższego $m=6$, $n=8$).