190. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech $0<k<p$. Udowodnić, że liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p.

192. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech a, b będą liczbami całkowitymi. Dowieść, że

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

194. (Małe twierdzenie Fermata) Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

196. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a oraz dowolnej liczby naturalnej k

$$a^{k(p-1)+1} \equiv a \pmod{p}.$$

198. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^{561} \equiv a \pmod{561}.$$

200. Wskazać dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{22}-2^{22}$.

202. Wskazać dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{16}-2^{16}$.

204. Wskazać dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $13^{46}-2^{46}$.

206. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{88}-2^{88}$.

208. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{66}-2^{66}$.

210. Wskazać cztery dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{210}-1$.

212. Wskazać trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $51^{22}-2^{44}$.

214. Wskazać pięć dwucyfrowych dzielników pierwszych liczby $3^{180}-2^{120}$.

216. Udowodnić, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że

$$n^n \equiv (n+1)^{n+1} \pmod{p}.$$

218. Niech k będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczby $6k+1$, $12k+1$, $18k+1$ są pierwsze. Udowodnić, że liczba

$$n=(6k+1)\cdot(12k+1)\cdot(18k+1)$$

jest liczbą Carmichaela, tzn. dla każdej liczby całkowitej a zachodzi

$$a^n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ n)\,.$$

220. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<55$, że $n^3\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 55)$.

222. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<91$, że $n^5\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 91)$.

224. Znaleźć taką liczbę naturalną $n<4141$, że $n^{67}\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4141)$.

226. Liczba pierwsza p, liczba naturalna k oraz liczby całkowite a, b spełniają warunek $a\equiv b\ \left(\mathrm{mod}\ p^k\right)$. Dowieść, że $a^p\equiv b^p\ \left(\mathrm{mod}\ p^{k+1}\right)$.

228. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi przystawanie

$$a^{p^2-p}\equiv 1\ \left(\mathrm{mod}\ p^2\right)\,.$$

230. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby 2^p-1 daje przy dzieleniu przez p resztę 1.

232. Dowieść, że liczba 127 jest pierwsza nie wykonując żadnego dzielenia tej liczby przez mniejsze liczby.

234. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby 2^p+1 różny od 3 daje przy dzieleniu przez p resztę 1.

236. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych zakończonych cyfrą 1.

238. Niech k będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby $2^{2^k}+1$ daje przy dzieleniu przez 2^{k+1} resztę 1.

240. Wiedząc, że

$$2^7\cdot 5\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 641)\qquad \text{oraz}\qquad 5^4\equiv -2^4\ (\mathrm{mod}\ 641)$$

udowodnij (bez wykonywania żmudnych obliczeń), że

$$2^{32}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 641)\,.$$