Zadanie na wakacje.

311. Rozstrzygnąć, czy równanie

$$m^m \cdot n^n = k^k$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $k, m, n > 1$.

Funkcja Eulera i funkcja Carmichaela

$\varphi\left(p^k\right) = (p-1)p^{k-1}$ dla liczby pierwszej p i naturalnej[1] k
$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ dla względnie pierwszych m, n
$\lambda\left(2^k\right) = 2^{k-1}$ dla $k = 1, 2$
$\lambda\left(2^k\right) = 2^{k-2}$ dla liczby naturalnej $k \geqslant 3$
$\lambda\left(p^k\right) = (p-1)p^{k-1}$ dla nieparzystej liczby pierwszej p i naturalnej k
$\lambda(mn) = \mathrm{NWW}(\lambda(m), \lambda(n))$ dla względnie pierwszych m, n

Twierdzenie: Dla dowolnej liczby naturalnej m oraz dowolnej liczby całkowitej a względnie pierwszej z m zachodzi

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m},$$

a nawet

$$a^{\lambda(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

313. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne m spełniające warunek: Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, s, t spełniających kongruencje

$$a \equiv b \pmod{m} \qquad \text{oraz} \qquad s \equiv t \pmod{m}$$

zachodzi

$$a^s \equiv b^t \pmod{m}.$$

315. Rozstrzygnąć, dla których liczb naturalnych k prawdziwe jest następujące zdanie: Jeżeli liczby naturalne s i t mają taką samą końcówkę k-cyfrową, to dla dowolnej liczby naturalnej a względnie pierwszej z 10 liczby a^s i a^t mają taką samą końcówkę $k+1$-cyfrową.

317. Rozstrzygnąć, dla których liczb naturalnych k prawdziwe jest następujące zdanie: Jeżeli liczby naturalne s i t mają taką samą końcówkę k-cyfrową, to dla dowolnych liczb naturalnych a, b względnie pierwszych z 10 liczby a^{b^s} i a^{b^t} mają taką samą końcówkę $k+2$-cyfrową.

[1] Przypomnienie: przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, czyli "naturalna" = "całkowita dodatnia".

Reszty i niereszty kwadratowe (i wyższych stopni)

Liczbę całkowitą r nazywamy resztą kwadratową (odpowiednio: sześcienną i stopnia k) modulo m, jeżeli kongruencja

$$x^2 \equiv r \pmod{m}$$

ma rozwiązanie całkowite x. Odpowiednio: $x^3 \equiv r \pmod{m}$ i $x^k \equiv r \pmod{m}$.

W przeciwnym razie resztę r nazywamy niereszą kwadratową (odpowiednio: sześcienną i stopnia k) modulo m.

319. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile wśród liczb 1, 2, 3, ..., $p-1$ jest reszt kwadratowych, a ile niereszt kwadratowych?

331. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile wśród liczb 1, 2, 3, ..., $p-1$ jest reszt sześciennych, a ile niereszt sześciennych?

333. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile wśród liczb 1, 2, 3, ..., $p-1$ jest reszt, a ile niereszt bikwadratowych (czwartego stopnia)?

335. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile wśród liczb 1, 2, 3, ..., $p-1$ jest reszt, a ile niereszt piątego stopnia?

337. Liczbę naturalną g względnie pierwszą z m nazywamy pierwiastkiem pierwotnym (lub generatorem) modulo m, jeżeli dla każdej liczby naturalnej r względnie pierwszej z m kongruencja

$$g^t \equiv r \pmod{m}$$

ma rozwiązanie naturalne t. Wyznaczyć liczbę nieujemnych pierwiastków pierwotnych modulo m mniejszych od m.

339. Dla których liczb pierwszych p liczba -1 jest resztą kwadratową modulo p?

351. Dla których liczb pierwszych p liczba 2 jest resztą kwadratową modulo p?

353. Dla których liczb pierwszych p liczba 3 jest resztą kwadratową modulo p?

355. Dla których liczb pierwszych p liczba 5 jest resztą kwadratową modulo p?

357. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 6. Dowieść, że wśród sześciu liczb od 1 do 6 są co najmniej trzy reszty kwadratowe.

359. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Dowieść, że dowolny dzielnik pierwszy liczby $2^{2^k}+1$ daje przy dzieleniu przez 2^{k+2} resztę 1.

371. Niech $p=4k+3>3$ będzie taką liczbą pierwszą, że liczba $q=2p+1$ też jest pierwsza. Dowieść, że liczba 2^p-1 jest złożona.

373. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech p będzie takim dzielnikiem pierwszym liczby $n^{15}-1$, że żadna z liczb n^3-1 i n^5-1 nie dzieli się przez p. Dowieść, że liczba p daje przy dzieleniu przez 30 resztę 1.

375. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech p będzie takim dzielnikiem pierwszym liczby $n^{15}+1$, że żadna z liczb n^3+1 i n^5+1 nie dzieli się przez p. Dowieść, że liczba p daje przy dzieleniu przez 30 resztę 1.

377. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech p będzie takim dzielnikiem pierwszym liczby $n^{105}-1$, że żadna z liczb $n^{15}-1$, $n^{21}-1$ i $n^{35}-1$ nie dzieli się przez p. Dowieść, że liczba p daje przy dzieleniu przez 210 resztę 1.

379. Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b niepodzielne przez p, że liczba $a+b$ jest niepodzielna przez p^2. Dowieść, że liczba a^p+b^p jest niepodzielna przez p^3.

391. Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, że liczba

$$a^{p^p}+b^{p^p}$$

jest podzielna przez p. Dowieść, że jest ona podzielna przez p^{p+1}.

393. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, c, że liczba

$$a^{p^2}+b^{p^2}+c^{p^2}$$

jest podzielna przez p^3. Dowieść, że wówczas liczba

$$a^p+b^p+c^p$$

jest podzielna przez p^2.

395. Dana jest liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita a, że

$$a\not\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p)$$

oraz

$$a^3\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p)\,.$$

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej k zachodzi kongruencja

$$(a+1)^{p^k}\equiv a^{p^k}+1\ \left(\mathrm{mod}\ p^{k+1}\right).$$

397. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, c niepodzielne przez p, że

$$a^p + b^p \equiv c^p \pmod{p^2}.$$

Dowieść, że wówczas istnieje taka liczba całkowita d, że

$$(d+1)^p \equiv d^p + 1 \pmod{p^2},$$

a przy tym liczby d i $d+1$ są niepodzielne przez p.

399. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, c niepodzielne przez p, że

$$a^7 + b^7 \equiv c^7 \pmod{p}.$$

Dowieść, że wówczas istnieją dwie kolejne niezerowe reszty siódmego stopnia modulo p.

511. Dowieść, że dla każdej liczby pierwszej $p > 7$ istnieje niezerowa reszta kwadratowa modulo p, po której następuje niezerowa reszta sześcienna modulo p.

513. Dowieść, że dla każdej odpowiednio dużej liczby pierwszej p istnieje niezerowa reszta sześcienna modulo p różna od 8, po której następuje niezerowa reszta kwadratowa modulo p.

515. Dowieść, że dla każdej liczby pierwszej $p > 13$ istnieje para kolejnych niezerowych reszt sześciennych modulo p.

517. Dowieść, że dla każdej liczby pierwszej $p > 17$ istnieje trójka kolejnych niezerowych reszt kwadratowych modulo p.

519. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $n^{n^3} - n^n$ nie jest podzielna przez 5.

531. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $n^{n^7} - n^n$ nie jest podzielna przez 43.

533. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\mathrm{NWD}\left(5^{2^n} + 1,\, 26^{2^n} + 1,\, 65^{2^n} + 1\right) \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}.$$

535. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ liczba $2^{2^n} + 1$ ma dzielnik pierwszy większy od $(n+2) \cdot 2^{n+4}$.