

537. Mamy talię 52 kart. Tasowaniem będziemy nazywać wykonanie następujących czynności: dowolny podział talii na część górną i dolną, a następnie dowolne zmieszanie kart z zachowaniem porządku w obrębie każdej części. Mówiąc formalnie, tasowaniem jest dowolne przemieszanie kart, w którym i -ta karta od wierzchu przechodzi na pozycję p_i , przy czym istnieje takie $m \in \{1, 2, 3, \dots, 51\}$, że $p_i < p_{i+1}$ dla $i < m$ oraz dla $i > m$. Rozstrzygnij, czy rozpoczynając od ustalonego początkowego uporządkowania kart, można uzyskać każde inne uporządkowanie wykonując pięć tasowań.

539. Tasowanie kart przebiega następująco: Bierzymy talię kart w prawą rękę i przerzucamy do lewej ręki po jednej karcie, raz na wierzch, raz pod spód. Najpierw przerzucamy do lewej ręki pierwszą kartę z wierzchu, potem drugą kartę wrzucamy na wierzch pierwszej, trzecią pod spód, czwartą na wierzch, piątą pod spód i tak dalej. Tak więc karty ułożone w kolejności:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$$

po jednokrotnym przetasowaniu ułożą się w kolejności

$$\dots, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

Dowieść, że przy wielokrotnym tasowaniu talii złożonej z k kart, po nie więcej niż k tasowaniach otrzymamy początkowe ułożenie kart.

551. Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniająca dla każdego $n \in \mathbb{N}$ warunek $f(f(n)) = 2n$.

553. Rozważamy wszystkie n -elementowe podzbiory zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Których podzbiorów jest więcej i o ile: o parzystej czy o nieparzystej sumie elementów?

555. Ciąg (x_n) o wyrazach rzeczywistych spełnia rekurencję $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wartością wielokrotną tego ciągu nazwiemy każdą liczbę rzeczywistą, która pojawia się w tym ciągu co najmniej dwukrotnie. Jak dużo wartości wielokrotnych może mieć taki ciąg?

Możliwe odpowiedzi: konkretna liczba; dowolnie dużo, ale skończenie wiele; nieskończenie wiele.

557. Dla możliwie najmniejszej liczby całkowitej dodatniej n rozwiąż poniższe zadanie: Zbiór Z składa się z n różnych liczb całkowitych dodatnich. Każdy jego 28-elementowy podzbiór zawiera dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej. Udowodnij, że zbiór Z ma 38-elementowy podzbiór, w którym każdy element jest dzielnikiem każdego większego elementu.

559. Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$, w których równanie

$$x + y = 2n + 1$$

nie ma rozwiązań.

571. Dana jest liczba całkowita $n \geq 5$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ układu równań

$$x_{i-2}^3 + x_{i-1}^3 + x_i^3 = x_i^4 + x_{i+1}^3 + x_{i+2}^2 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

gdzie numeracja x -ów jest cykliczna.

573. Czy w sześciennym pudełku o krawędzi 4 można umieścić 65 kul o średnicy 1?

575. Układ liczb całkowitych dodatnich $c_1, c_2, \dots, c_n$ nazwiemy dopuszczalnym, gdy za pomocą wagi szalkowej i dwóch kompletów odważników o ciężarach $c_1, c_2, \dots, c_n$ można zważyć dowolny przedmiot o ciężarze będącym liczbą całkowitą dodatnią nie przekraczającą $2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$. Dla każdej liczby n wyznaczyć maksymalną sumę n liczb tworzących układ dopuszczalny.

Uwaga: Odważniki można kłaść na obie szalki wagi.

577. Liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają warunek

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $t > 1$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n x_i^t \leq \sum_{i=1}^n x_i^{t+1}.$$

579. Dla nieparzystej liczby pierwszej p określamy ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ wzorami:

$$\begin{aligned} a_n &= n & \text{dla} & \quad n < p, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-p} & \text{dla} & \quad n \geq p. \end{aligned}$$

Wyznaczyć resztę z dzielenia a_{p^3} przez p .

591. Dla danej liczby naturalnej n wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^i}{i},$$

gdzie liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają warunek

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = n.$$

593. Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c spełniających warunek $abc = 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

595. Niech $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Udowodnić, że wielomian $P(5x^2)$ jest iloczynem dwóch niestałych wielomianów o współczynnikach całkowitych.

597. Dla nieparzystej liczby pierwszej p wyznaczyć liczbę takich podzbiorów A zbioru $\{1, 2, \dots, 2p\}$, że

- zbior A ma p elementów,
- suma elementów zbioru A jest podzielna przez p .

599. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, z) liczb wymiernych dodatnich, dla których liczby $x + y + z$, xyz , $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ są całkowite.

711. Różne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie $n \geq 4$, spełniają warunki

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

Dowieść, że spośród liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ można tak wybrać cztery różne liczby a, b, c, d , aby

$$a + b + c + nabc \leq \sum_{i=1}^n x_i^3 \leq b + c + d + nbcd.$$

713. Wyznaczyć wszystkie pary $(m, n) \neq (1, 1)$ liczb całkowitych dodatnich, dla których liczba $n^3 + 1$ jest podzielna przez $mn - 1$.

715. Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki:

$$f(1000) = 999, \quad f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wyznaczyć $f(500)$.

717. Na nieskończonej szachownicy stawiamy n^2 pionków na polach tworzących kwadrat o boku n (po jednym pionku na każdym z tych pól). Możemy zbijać pionki przeskakując zbijającym pionkiem przez zbijany pionek na wolne pole, w kierunku poziomym (w lewo lub w prawo) lub pionowym (w górę lub w dół) – trzy pola zaangażowane w zbijanie są kolejnymi polami w rzędzie poziomym lub pionowym. Czy można doprowadzić do sytuacji, w której na szachownicy pozostanie tylko jeden pionek?

719. Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje rosnąca funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniająca warunki

$$f(1) = 2, \quad f(f(n)) = f(n) + n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

731. Rozwiązać równanie $2^m = 3^n + 7$ w liczbach całkowitych nieujemnych m, n .

733. Ciąg (a_n) o wyrazach całkowitych dodatnich spełnia warunki

$$a_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n iloczyn $a_n a_{n+1}$ jest wyrazem ciągu (a_n) .

735. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, e, f, m, n spełniają warunki

$$a + b = c + d = e + f = 257 \quad \text{oraz} \quad \frac{ace}{bdf} = \frac{m}{n}.$$

Dowieść, że $m + n \geq 257$.

737. Dowieść, że żadna liczba postaci

$$\sum_{n=1}^{60} \varepsilon_n n^{n^n},$$

gdzie $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, nie jest piątą potęgą liczby całkowitej.

739. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie $n_1, n_2, \dots, n_{256}$ oraz liczby wymierne $w_1, w_2, \dots, w_{256}$, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{7}} = \sum_{k=1}^{256} w_k \sqrt[4]{n_k}.$$

751. Niech S_p będzie symetrią płaszczyzny względem prostej p . Dowieść, że dla każdych dziesięciu prostych $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} S_a S_b S_c S_d S_e S_a S_b S_c S_d S_e S_f S_g S_h S_i S_j S_f S_g S_h S_i S_j &= \\ &= S_f S_g S_h S_i S_j S_f S_g S_h S_i S_j S_a S_b S_c S_d S_e S_a S_b S_c S_d S_e. \end{aligned}$$

753. Rozstrzygnąć, czy wśród dowolnych dziesięciu kolejnych liczb naturalnych istnieje taka, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych.

755. Rozstrzygnąć, czy wśród dowolnych siedemnastu kolejnych liczb naturalnych istnieje taka, która jest względnie pierwsza z każdą z pozostałych.

757. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n spełniających następujące warunki:

- liczba n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych dodatnich,
- liczba n jest sumą dwóch sześciątów liczb całkowitych dodatnich,
- liczba n nie jest sumą dwóch szóstych potęg liczb całkowitych dodatnich.