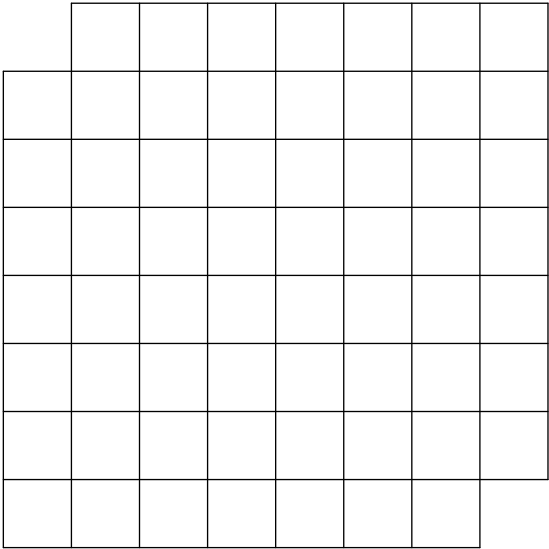


2. Udowodnij, że szachownicy o wymiarach 8×8 z usuniętymi przeciwległymi polami narożnymi (rys. 2) nie można pokryć kostkami domina (czyli prostokątami o wymiarach 1×2).

Rozwiąż zadanie dwoma istotnie różnymi sposobami.

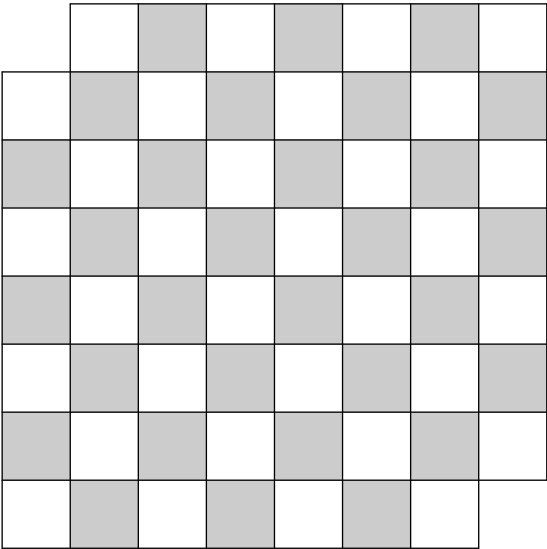
Obowiązują standardowe założenia: kostki nie mogą na siebie zachodzić ani wystawać poza pokrywaną figurę.



rys. 2

Rozwiązanie:

Sposób I: Pomalujmy pola danej figury w tradycyjny wzór szachownicy (rys. 4).



rys. 4

	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

rys. 6

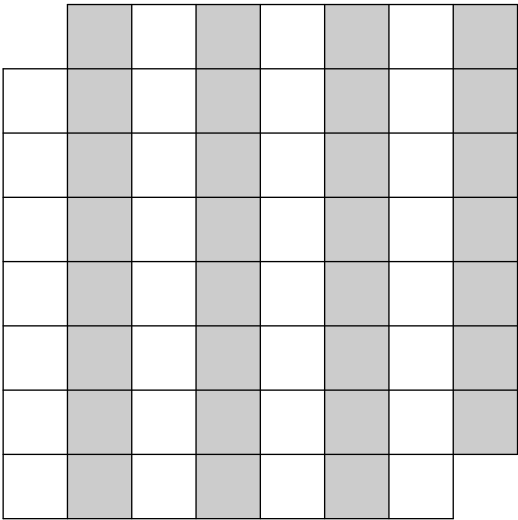
Wówczas każda kostka domina położona na szachownicy tak, aby zakrywała dwa pola, zakrywa jedno pole białe i jedno czarne. Gdyby figurę dało się pokryć kostkami domina, oznaczałoby to, że zawiera ona tyle samo pól białych, co czarnych. Jednak pełna szachownica 8×8 zawiera po 32 pola białe i czarne, więc usunięcie dwóch naroży (w naszym wypadku czarnych) prowadzi do figury o 30 polach czarnych i 32 polach białych. Skoro liczby pól białych i czarnych są różne, nie da się pokryć tej figury kostkami domina.

Pokrewne rozwiązanie można oprzeć o rysunek 6, gdzie każda kostka domina pokrywa pola o sumie liczb równej 0, a suma wszystkich liczb wpisanych w pola figury jest równa 2.

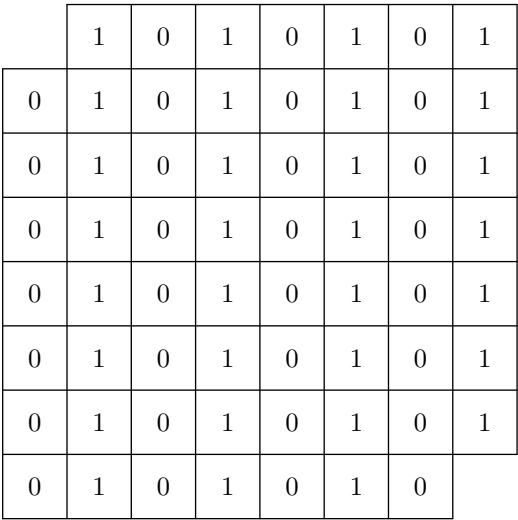
Sposób II: Pomalujmy pola kwadratu w pionowe pasy (rys. 8). Wówczas dana w zadaniu figura składa się z 31 pól białych i 31 pól czarnych. Każda kostka domina ułożona pionowo pokrywa dwa pola jednego koloru, czyli pokrywa parzystą liczbę pól każdego z kolorów. Natomiast każda kostka ułożona poziomo pokrywa po jednym (a więc nieparzystą liczbę) polu każdego koloru. Ponieważ liczby pól każdego koloru są nieparzyste, to oznacza, że gdyby figurę dało się pokryć kostkami domina, to nieparzyście wiele z nich byłoby ułożonych poziomo, a parzyście wiele pionowo.

Gdybyśmy jednak pomalowali figurę w pasy poziome, to rozumując analogicznie doszlibyśmy do konkluzji przeciwnej: pokrycie figury wymaga ułożenia poziomo parzyście wielu kostek domina, a nieparzyście wielu pionowo. Ta sprzeczność dowodzi, że pokrycie danej figury kostkami domina nie jest możliwe.

Pokrewne rozwiązanie można oprzeć na rysunku 20, gdzie każda kostka domina ułożona poziomo pokrywa pola o nieparzystej sumie liczb, a kostka pionowa o parzystej. Przy tym liczby wpisane w pola figury sumują się do 31.



rys. 8



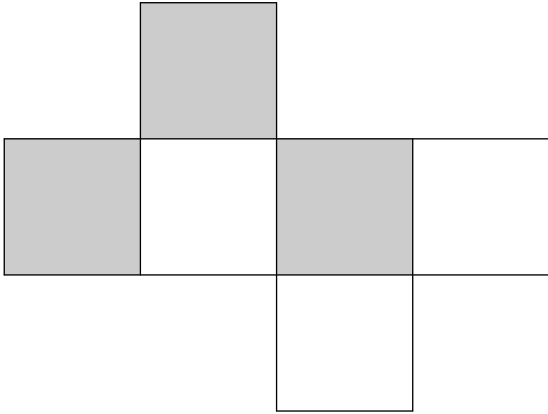
rys. 20

Uwaga: Utało się mówić o rzędach szachownicy jako *poziomych* i *pionowych*. Nie śmiem naruszać tej tradycji, chociaż zdaję sobie sprawę, że gra w szachy na tradycyjnej szachownicy ułożonej tak, że występują na niej rzędy pionowe, nie jest możliwa w ziemskim polu grawitacyjnym (nie dotyczy szachów podróżnych z figurami magnetycznymi lub figurami z bolcami wtykanymi w dziurki na polach szachownicy). Rozumiemy więc, że słowa *poziomy* i *pionowy* odnoszą się do odpowiednich kierunków kartki lub ekranu z rysunkiem, którego używamy do prezentacji zadania.

4. Podaj przykład figury złożonej z sześciu pól (czyli kwadratów jednostkowych), której nie da się pokryć kostkami domina, pomimo że:
- przy standardowym kolorowaniu (czarnobiałym, pola sąsiadujące bokiem mają różne kolory) pól białych jest tyle samo, co czarnych,
 - figura jest *w jednym kawałku*, tzn. od każdego pola wieża może przejść (w jednym lub kilku ruchach) do każdego innego.

Rozwiązanie:

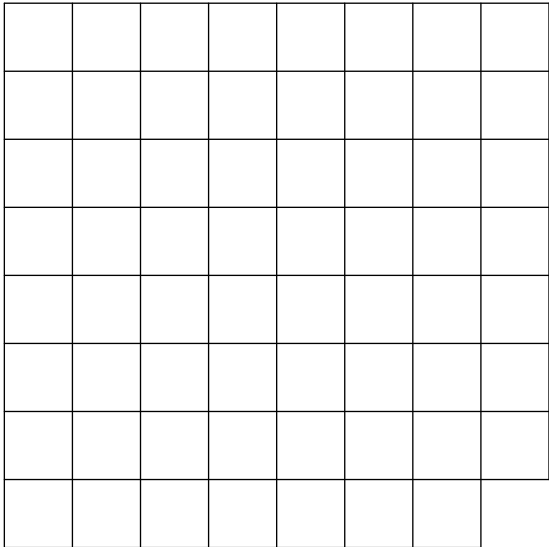
Figura spełniająca podane warunki jest przedstawiona na rysunku 22.



rys. 22

Jest to prosty, ale pouczający przykład: równość liczb pól czarnych i białych figury pokolorowanej w szachownicę jest warunkiem koniecznym, aby figurę można było pokryć kostkami domina, ale nie jest to warunek wystarczający.

6. Udowodnij, że szachownicy o wymiarach 8×8 z usuniętym polem narożnym (rys. 24) nie można pokryć prostokątami o wymiarach 1×3 .



rys. 24

Rozwiązanie:

Sposób I: Ponumerujmy pola danej figury jak na rysunku 26. Wówczas każdy prostokąt 1×3 pokrywający trzy pola pokrywa po jednym polu z każdym z trzech numerów 1, 2, 3. Ponieważ jednak liczby pól z numerami 1, 2, 3 są różne (wynoszą odpowiednio 21, 22, 20), żądane pokrycie figury nie jest możliwe. Zamiast używać numeracji trzema liczbami można również pokolorować pola odpowiadające numerowi 2 (rys. 28) i stwierdzić, że jest ich 22 — o jeden więcej niż prostokątów, które należałoby użyć do pokrycia figury.

Zamiast zliczać pola poszczególnych rodzajów, można stwierdzić, że fragment figury obrysowany grubą linią daje się pokryć prostokątami 1×3 , a zatem bilans poszczególnych rodzajów pól możemy odczytać z trzech pól w prawym dolnym narożu.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	

rys. 26

rys. 28

Sposób II: Ponumerujmy pola figury jak na rysunku 40. Wówczas każdy prostokąt 1×3 pokrywa trzy pola jednego rodzaju lub po jednym polu każdego z trzech rodzajów. Gdyby figurę dało się pokryć takimi prostokątami, zawierałaby ona liczby pól poszczególnych rodzajów dające takie same reszty z dzielenia przez 3. Tymczasem pól z numerami 1, 2 i 3 jest odpowiednio 24, 23 i 16, co przy dzieleniu przez 3 daje reszty 0, 2 i 1.

1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	

rys. 40

1	-1	0	1	-1	0	1	-1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0
0	1	-1	0	1	-1	0	1
1	-1	0	1	-1	0	1	-1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0
0	1	-1	0	1	-1	0	1
1	-1	0	1	-1	0	1	-1
-1	0	1	-1	0	1	-1	

rys. 42

Sposób III: Wpiszmy w pola figury liczby jak na rysunku 42. Wówczas każdy prostokąt 1×3 pokrywa pola o sumie liczb równej 0, a suma wszystkich liczb wpisanych w pola figury jest równa -1 .

8. Kwadrat o boku 8 podzielono na 64 kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Czy można umieścić w nim 21 prostokątów o wymiarach 1×3 w taki sposób, aby każdy prostokąt pokrywał 3 pola, a przy tym prostokąty na siebie nie nachodziły? Jeśli tak, to które pole może pozostać niepokryte?

Rozwiązanie:

Sposób I: Ponumerujmy pola kwadratu jak na rysunku 44. Wówczas każdy prostokąt 1×3 pokrywający trzy pola pokrywa po jednym polu z każdym z trzech numerów 1, 2, 3. Ponieważ liczby pól z numerami 1, 2, 3 są równe odpowiednio 21, 22, 21, po umieszczeniu 21 prostokątów musi pozostać niepokryte jedno z pól oznaczonych numerem 2. Do analogicznej konkluzji dochodzimy po zastosowaniu symetrycznej numeracji (rys. 46).

Zatem pole, które mogłoby zostać niepokryte, musi mieć numer 2 na obu rysunkach 44 i 46. Cztery takie pola (ułożone symetrycznie) zaznaczono na rysunku 46.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

rys. 44

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

rys. 46

rys. 48

1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2

rys. 60

Dla zakończenia rozwiązania należy wykazać, że odpowiednie umieszczenie 21 prostokątów 1 × 3 w kwadracie jest w ogóle możliwe. Przykład takiego rozmieszczenia jest przedstawiony na rysunku 48.

Sposób II: Ponumerujemy pola kwadratu jak na rysunku 60. Wówczas każdy prostokąt 1 × 3 pokrywa trzy pola jednego rodzaju lub po jednym polu każdego z trzech rodzajów. Zatem liczby pól każdego z trzech rodzajów pokryte przez prostokąty umieszczone na szachownicy dają takie same reszty przy dzieleniu przez 3. Ponieważ pól z numerami 1, 2 i 3

jest odpowiednio 24, 24 i 16, niepokryte pole musi mieć numer 3. Po uwzględnieniu analogicznego wniosku z symetrycznego numerowania, w którym pola w rzędach poziomych mają takie same numery, dochodzimy do identycznej konkluzji jak w Sposobie I.

1	1	-2	1	1	-2	1	1
1	1	-2	1	1	-2	1	1
-2	-2	4	-2	-2	4	-2	-2
1	1	-2	1	1	-2	1	1
1	1	-2	1	1	-2	1	1
-2	-2	4	-2	-2	4	-2	-2
1	1	-2	1	1	-2	1	1
1	1	-2	1	1	-2	1	1

rys. 62

-3	1	2	-3	1	2	-3	1
1	1	-2	1	1	-2	1	1
2	-2	0	2	-2	0	2	-2
-3	1	2	-3	1	2	-3	1
1	1	-2	1	1	-2	1	1
2	-2	0	2	-2	0	2	-2
-3	1	2	-3	1	2	-3	1
1	1	-2	1	1	-2	1	1

rys. 64

Sposób III: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 62. Wówczas każdy prostokąt 1×3 pokrywa pola o sumie liczb równej 0, a suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 4. Zatem niepokryte musi być pole z wpisaną liczbą 4.

Inny zestaw liczb prowadzący do analogicznej konkluzji jest przedstawiony na rysunku 64, gdzie suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 0.

20. Kwadrat o boku 8 podzielono na 64 kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Ile prostokątów o wymiarach 1×5 potrzeba, aby pokryć cały kwadrat w taki sposób, że każdy prostokąt pokrywa 5 pól? Prostokąty mogą na siebie nachodzić (tzn. pole może być pokryte przez dwa lub więcej prostokątów).

Rozwiązanie:

Sposób I: Zauważmy, że szachownicę o boku 8 można pokryć 14 prostokątami o wymiarach 1×5 jak na rysunku 66, gdzie przedstawiono pokrycie 11 prostokątami 1×5 oraz 3 prostokątami 1×3 . Aby wykazać, że pokrycie mniejszą liczbą prostokątów nie jest możliwe, rozważmy ponumerowanie pól jak na rysunku 68. Ponieważ przy takim ponumerowaniu występuje 14 pól z numerem 3, a każdy prostokąt 1×5 pokrywa tylko jedno takie pole, wnioskujemy stąd, że użycie 14 prostokątów do pokrycia kwadratu jest konieczne.

rys. 66

1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5

rys. 68

1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3

rys. 80

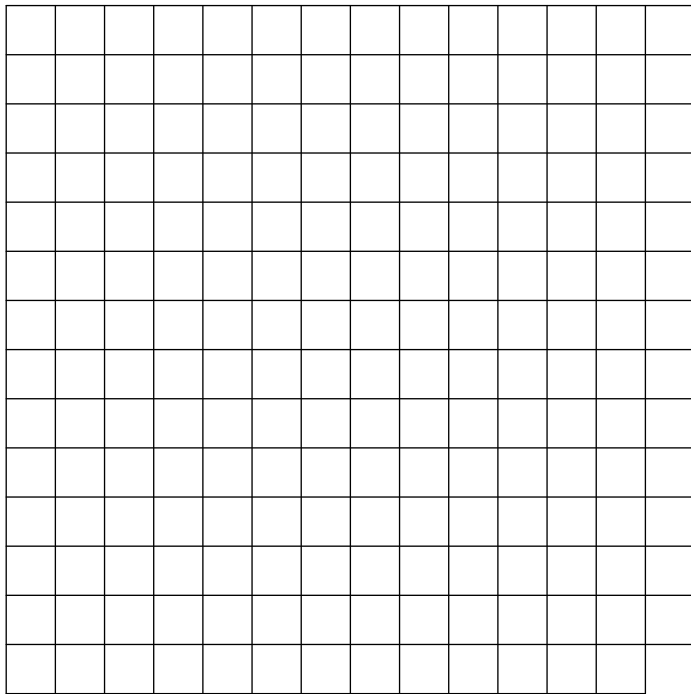
4	4	4	-6	-6	4	4	4
4	4	4	-6	-6	4	4	4
4	4	4	-6	-6	4	4	4
-6	-6	-6	9	9	-6	-6	-6
-6	-6	-6	9	9	-6	-6	-6
4	4	4	-6	-6	4	4	4
4	4	4	-6	-6	4	4	4
4	4	4	-6	-6	4	4	4

rys. 82

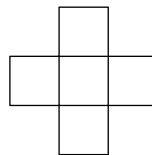
Sposób II: Ponumerujemy pola szachownicy jak na rysunku 80. Wówczas pól z liczbami 1, 2, 3, 4, 5 jest odpowiednio 16, 16, 16, 8 i 8. Gdyby dało się pokryć szachownicę 13 prostokątami 1×5 , to jedno (i tylko jedno) pole byłoby pokryte dwukrotnie. Zauważmy, że każdy prostokąt pokrywa 5 pól z takim samym numerem lub po jednym polu każdego rodzaju. Stąd wniosek, że liczby pól każdego z rodzajów pokrytych prostokątami dają przy dzieleniu przez 5 takie same reszty, jeśli uwzględnić w tych rachubach krotności pokrycia. Jednak przy tylko jednym polu pokrytym dwukrotnie, nie jesteśmy w stanie uzyskać reszt 1, 1, 1, 3 i 3, jakie dają przy dzieleniu przez 5 liczby poszczególnych rodzajów pól.

Sposób III: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rysunku 82. Wówczas każdy prostokąt 1×5 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, a suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa 36. Gdyby dało się pokryć szachownicę tak, aby tylko jedno pole było pokryte dwukrotnie, to w tym polu musiałaby znajdować się liczba -36 . A pola z taką liczbą nie ma.

22. Udowodnij, że szachownicy o wymiarach 14×14 z usuniętym polem narożnym (rys. 84) nie można wypełnić prostokątami o wymiarach 1×5 oraz pięciopółowymi krzyżkami jak na rysunku 86.



rys. 84



rys. 86

Rozwiązanie:

Sposób I: Ponumerujemy pola szachownicy jak na rysunku 88. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×5 oraz każdy krzyżyk pokrywają po jednym polu z każdym z numerów od 1 do 5. Gdyby pokrycie szachownicy prostokątami i krzyżykami było możliwe, zawierałaby ona tyle samo pól każdego rodzaju. Tymczasem liczby pól z numerami 1, 2, 3, 4 i 5 są odpowiednio równe 39, 39, 40, 39 i 38. Można się o tym przekonać licząc pola poszczególnych rodzajów w kwadracie 4×4 w prawym dolnym rogu, gdyż w pozostałej części szachownicy (obwiedzionej na rysunku grubą linią) pól każdego rodzaju jest tyle samo (36) – a to dlatego, że ta część daje się pokryć prostokątami 1×5 .

Sposób II: Pomalujmy niektóre pola szachownicy jak na rysunku 200. Są to pola oznaczone numerem 3 w numerowaniu ze Sposobu I. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach

1×5 oraz każdy krzyżyk pokrywają dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych pól jest 40, a do pokrycia 195 pól szachownicy należałoby użyć 39 klocków, żądane pokrycie nie jest możliwe.

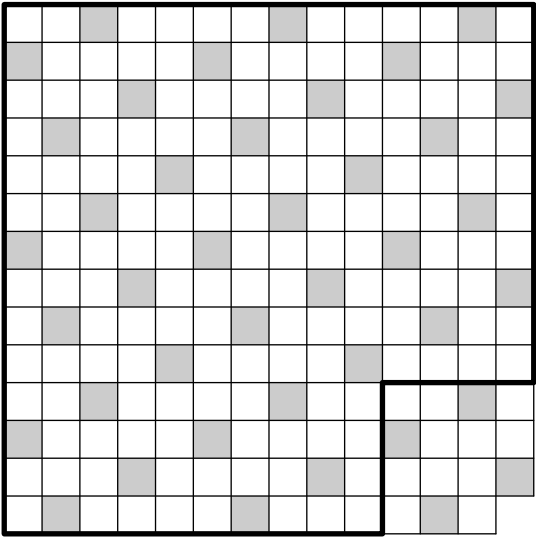
O tym, że zamalowanych pól jest 40, możemy się przekonać wyróżniając część szachownicy, która daje się podzielić na prostokąty 1×5 . W tej części zamalowane jest co piąte pole, czyli łącznie 36 pól. Do tego dochodzą 4 zamalowane pola w kwadracie 4×4 w prawym dolnym rogu szachownicy.

Sposób III: Pomalujmy niektóre pola szachownicy jak na rysunku 202. Są to pola oznaczone numerem 5 w numerowaniu ze Sposobu I. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×5 oraz każdy krzyżyk pokrywają dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych pól jest 38, a do pokrycia 195 pól szachownicy należałoby użyć 39 klocków, żądane pokrycie nie jest możliwe.

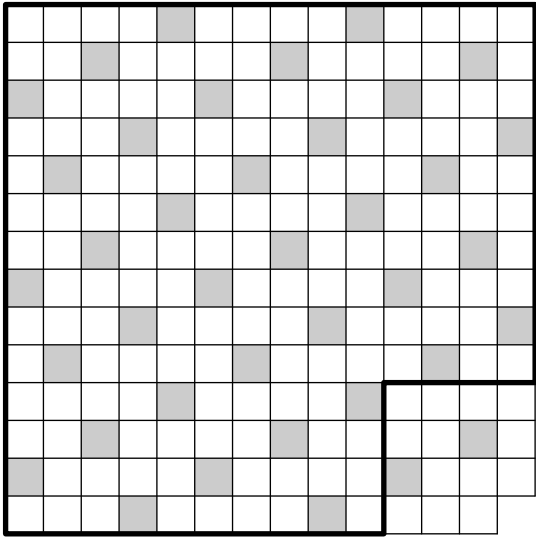
O tym, że zamalowanych pól jest 38, możemy się przekonać wyróżniając część szachownicy, która daje się podzielić na prostokąty 1×5 . W tej części zamalowane jest co piąte pole, czyli łącznie 36 pól. Do tego dochodzą 2 zamalowane pola w kwadracie 4×4 w prawym dolnym rogu szachownicy.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

rys. 88



rys. 200

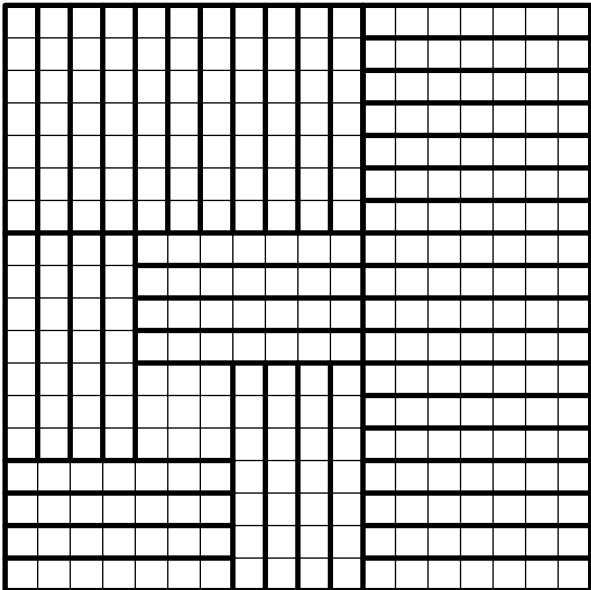


rys. 202

24. Kwadrat o boku 18 podzielono na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Ile najwięcej prostokątów o wymiarach 1×7 można umieścić w kwadracie w taki sposób, że każdy prostokąt pokrywa 7 pól, a przy tym prostokąty na siebie nie nachodzą?

Rozwiązanie:

Sposób I: Zauważmy, że na szachownicy o boku 18 można umieścić 45 prostokątów o wymiarach 1×7 jak na rysunku 204 (tradycyjnie szachownicą nazywamy kwadrat podzielony na kwadraty jednostkowe).



rys. 204

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4
2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5
3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1
6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2
7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3
1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4
2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5
3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1
6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2
7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3
1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4
2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5
3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7

rys. 206

Aby wykazać, że umieszczenie większej liczby prostokątów nie jest możliwe w zgodzie z warunkami zadania, rozważmy ponumerowanie pól jak na rysunku 206. Ponieważ przy takim ponumerowaniu występuje $1+8+15+14+7=45$ pól z numerem 1, a każdy prostokąt 1×7 pokrywa dokładnie jedno takie pole, wnioskujemy stąd, że umieszczenie w kwadracie więcej niż 45 prostokątów nie jest możliwe.

Sposób II: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rysunku 208. Wówczas każdy prostokąt 1×7 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, a suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa 144. Jeżeli umieścimy na szachownicy prostokąty o wymiarach 1×7 , to suma liczb wpisanych w niepokryte pola będzie równa 144. Osiągnięcie takiej sumy wymaga co najmniej 9 pól (z liczbami 16). Stąd wniosek, że co najmniej 9 pól musi zostać niepokrytych, a to oznacza, że nie jest możliwe umieszczenie więcej niż 45 prostokątów.

Ponieważ na rysunku 204 pokazaliśmy, jak rozmieścić 45 prostokątów, liczba 45 jest największą liczbą prostokątów o wymiarach 1×7 , jakie można umieścić w kwadracie o boku 18 w sposób zgodny z warunkami zadania.

9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12
-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12
-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12
-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12
-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12	16	16	16	-12	-12	-12	-12
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9
9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9	-12	-12	-12	9	9	9	9

rys. 208

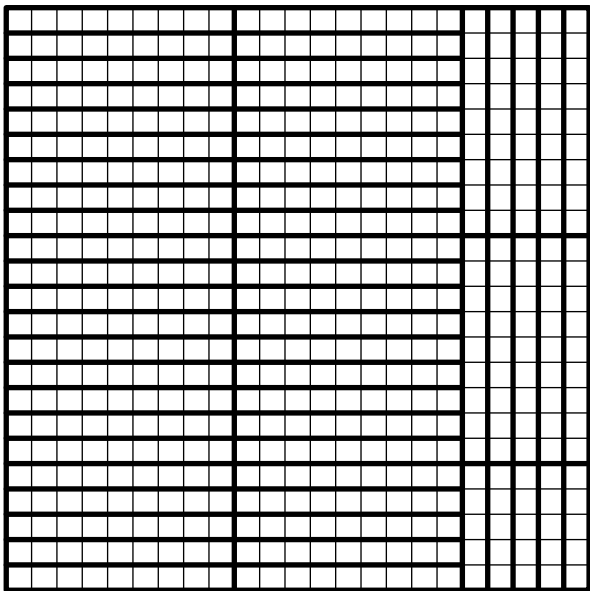
Uwaga: Nie podkreślamy tego w każdym zdaniu rozwiązania, ale w założeniach zadania piszemy wyraźnie o polach szachownicy po to, aby wymusić układanie prostokątów *po kratkach*. Podczas gdy w przypadku szczelnego wypełniania figury jest mniej lub bardziej jasne, że układanie musi odbywać się właśnie *po kratkach*, to w przypadku, gdy jest trochę luzu, takie założenie trzeba wyraźnie dopisać (jeśli taka jest nasza intencja).

26. Kwadrat o boku 23 podzielono na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Ile prostokątów o wymiarach 1×9 potrzeba, aby pokryć cały kwadrat w taki sposób,

że każdy prostokąt pokrywa 9 pól? Prostokąty mogą na siebie nachodzić (tzn. pole może być pokryte przez dwa lub więcej prostokątów).

Rozwiązanie:

Sposób I: Zauważmy, że szachownicę o boku 23 można pokryć 61 prostokątami o wymiarach 1×9 jak na rysunku 220, gdzie dla czytelności rysunku przedstawiono pokrycie 56 prostokątami 1×9 oraz 5 prostokątami 1×5 (te ostatnie wystarczy odpowiednio przedłużyć).



rys. 220

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2
8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2
8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

rys. 222

Aby wykazać, że pokrycie mniejszą liczbą prostokątów nie jest możliwe, rozważmy ponumerowanie pól jak na rysunku 222. Ponieważ przy takim ponumerowaniu występuje $5+14+23+14+5=61$ pól z numerem 5, a każdy prostokąt 1×9 pokrywa tylko jedno takie pole, wnioskujemy stąd, że użycie 61 prostokątów do pokrycia kwadratu jest konieczne.

Sposób II: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rysunku 224. Wówczas każdy prostokąt 1×9 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, a suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa 400. Jeżeli pokryjemy szachownicę prostokątami 1×9 , to suma liczb wpisanych w pola powtórnie pokrywane będzie równa -400 . Osiągnięcie takiej sumy wymaga co najmniej 20 pól (z liczbami -20). Skoro w co najmniej 20 przypadkach prostokąt będzie pokrywał pole pokryte już wcześniej, to liczba wszystkich pól pokrytych przez prostokąty po uwzględnieniu krotności pokrycia wyniesie co najmniej $23^2 + 20 = 549 = 9 \cdot 61$. Stąd wniosek, że pokrycie kwadratu wymaga użycia co najmniej 61 prostokątów.

Ponieważ na rysunku 220 pokazaliśmy, jak uzyskać pokrycie 61 prostokątami, liczba 61 jest najmniejszą liczbą prostokątów o wymiarach 1×9 , jakie trzeba wykorzystać do pokrycia kwadratu o boku 23 w sposób zgodny z warunkami zadania.

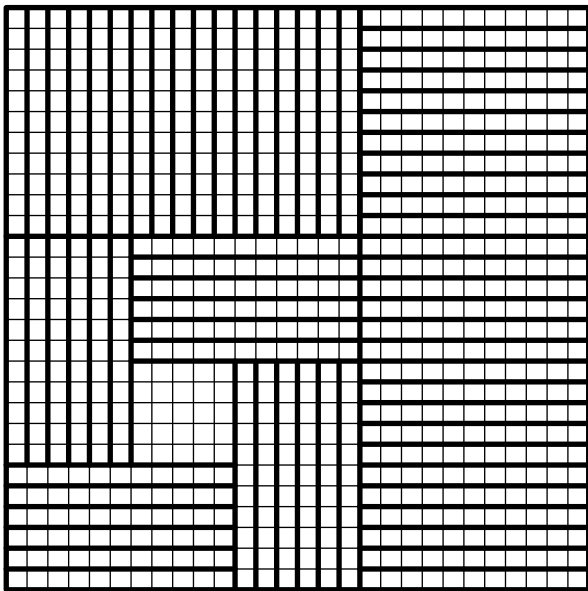
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20
-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20
-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20
-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20
-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20
-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20
-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20	25	25	25	25	-20	-20	-20	-20	-20
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16	-20	-20	-20	-20	16	16	16	16	16

rys. 224

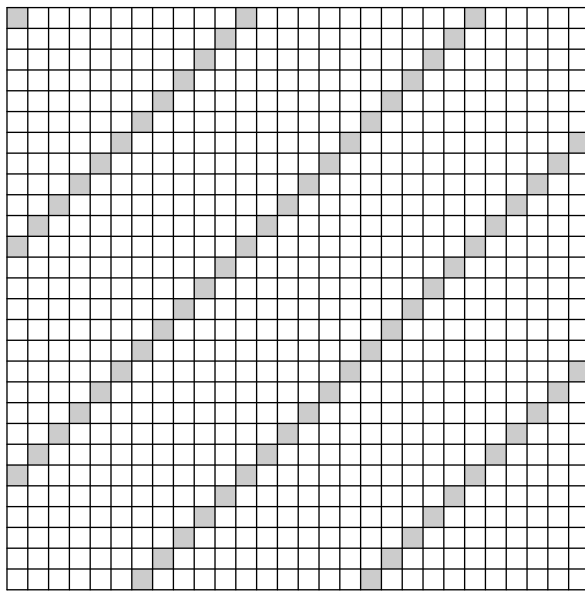
28. Kwadrat o boku 28 podzielono na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Ile najwięcej prostokątów o wymiarach 1×11 można umieścić w kwadracie w taki sposób, że każdy prostokąt pokrywa 11 pól, a przy tym prostokąty na siebie nie nachodzą?

Rozwiązanie:

Sposób I: Zauważmy, że na szachownicy o boku 28 można umieścić 69 prostokątów o wymiarach 1×11 jak na rysunku 226.



rys. 226



rys. 228

Aby wykazać, że umieszczenie większej liczby prostokątów nie jest możliwe w zgodzie z warunkami zadania, rozważmy pokolorowanie pól jak na rysunku 228. Ponieważ zakolorowanych jest $1+12+23+22+11=69$ pól, a każdy prostokąt 1×11 pokrywa dokładnie jedno takie pole, wnioskujemy stąd, że umieszczenie w kwadracie więcej niż 69 prostokątów nie jest możliwe.

Sposób II: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rysunku 240 (puste pola traktujemy tak, jakby wpisana była tam liczba 0). Wówczas każdy prostokąt 1×11 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 36, a suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa $2484 = 69 \cdot 36$. Stąd wniosek, że nie jest możliwe umieszczenie więcej niż 69 prostokątów. Co więcej, umieszczenie 69 prostokątów jest możliwe tylko przy pokryciu wszystkich liczb, a więc niepokryte mogą zostać tylko puste pola.

Ponieważ na rysunku 226 pokazaliśmy, jak rozmieścić 69 prostokątów, liczba 69 jest największą liczbą prostokątów o wymiarach 1×11 , jakie można umieścić w kwadracie o boku 28 sposobem zgodny z warunkami zadania.

1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6						6	6	6	6	6	6
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1

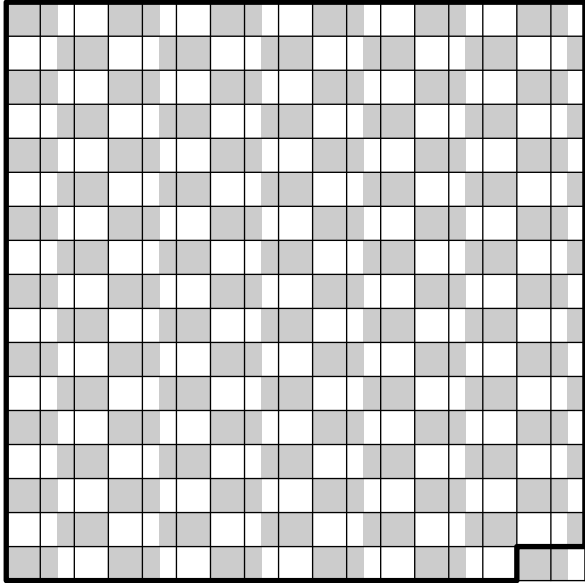
rys. 240

Uwaga do sposobu II: Aby obliczyć sumę wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy nie wykonując praktycznie żadnych rachunków, należy skonfrontować rysunki 226 i 240 i stwierdzić, że skoro każdy z 69 prostokątów 1×11 na rysunku 226 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 36, to wszystkie one pokrywają pola o sumie liczb $69 \cdot 36$. Do tego trzeba dodać sumę liczb w polach kwadratu 5×5 niepokrytego na rysunku 226. Spojrzenie na rysunek 240 pokazuje jednak, że te pola są puste, skąd wynika, że liczba $69 \cdot 36$ jest sumą wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy 28×28 .

40. Czy kwadrat o boku długości 17 można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2 lub 3?

Rozwiązanie:

Sposób I: Pokolorujmy kwadrat w szachownicę zamalowując na czarno i biało prostokąty rozmiaru $1 \times 1,5$ jak na rysunku 242. Dla czytelności rysunku zamiast koloru czarnego użyliśmy pewnego odcienia szarości.



rys. 242

1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0

rys. 244

Wówczas każdy kwadrat o boku 2 lub boku 3 zakrywający odpowiednio 4 lub 9 pól (czyli kwadratów jednostkowych, na które dzielimy dany kwadrat o boku 17), pokrywa tyle samo pola czarnego, co białego. Wniosek stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić takimi kwadratami, musiałaby zawierać taką samą powierzchnię białą i czarną.

Na rysunku 242 można prześledzić, że figura otoczona grubą linią zawiera tyle samo pola białego i czarnego. Zatem cały kwadrat ma pola czarnego o jedną jednostkę powierzchni więcej niż białego – bilans ten można odczytać z prostokąta 1×2 w prawym dolnym rogu.

Skoro więc kwadrat 17×17 nie zawiera takiej samej powierzchni pokrytej na biało, co na czarno, nie może być podzielony na kwadraty 2×2 i 3×3 .

Liczbowa wersja tego samego sposobu rozwiązania jest przedstawiona na rysunku 244, gdzie w pola kwadratu wpisano liczby będące bilansem powierzchni obydwu kolorów. Wówczas każdy kwadrat 2×2 lub 3×3 pokrywa pola z liczbami o sumie 0, a suma liczb wpisanych we wszystkie pola kwadratu jest równa 1.

Sposób II: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 246. Wówczas każdy kwadrat 2×2 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, natomiast każdy kwadrat 3×3

Tymczasem suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 17 (figura obwiedziona grubą linią zawiera pola o sumie liczb równej 0, a w ostatnim wierszu jest 17 jedynek).

[illegible]

rys. 246

[illegible]

rys. 248

Sposób III: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 248. Wówczas każdy kwadrat 3×3 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, natomiast każdy kwadrat 2×2 pokrywa pola o sumie liczb równej 0 lub ± 2 , a więc parzystej. Wynika stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić kwadratami o boku 2 lub 3, musiałaby zawierać pola o parzystej sumie liczb.

Tymczasem suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 17 (figura obwiedziona grubą linią zawiera pola o sumie liczb równej 0, a w przedostatnim wierszu jest 17 jedynek).

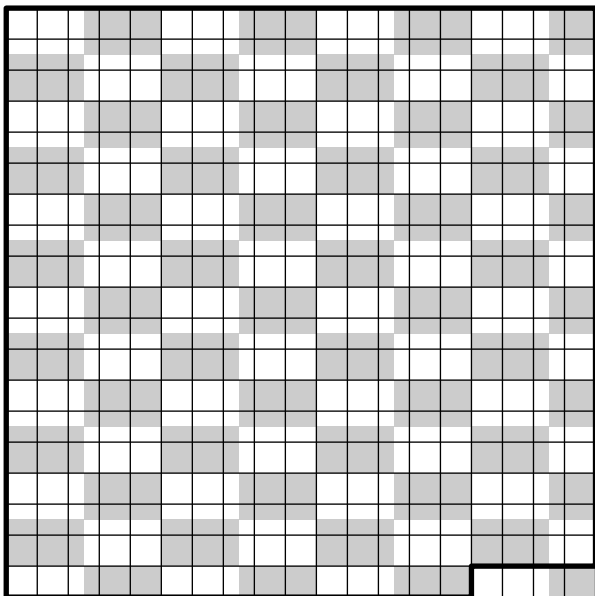
Uwaga: Skrupulatne prześledzenie powyższych rozwiązań pozwala uzyskać wynik mocniejszy, chociaż mniej zgrabny w sformułowaniu:

Kwadratu 17×17 nie da się wypełnić prostokątami 1×2 ustawionymi pionowo i prostokątami 1×3 ustawionymi poziomo (tak jest w przypadku Sposobów I i II, natomiast w Sposobie III należy zamienić kierunki rolami).

42. Czy kwadrat o boku długości 19 można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 3 lub 5?

Rozwiązanie:

Sposób I: Pokolorujmy kwadrat w szachownicę zamalowując na czarno i biało prostokąty rozmiaru $1,5 \times 2,5$ jak na rysunku 260.



rys. 260

-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1

rys. 262

Wówczas każdy kwadrat o boku 3 lub boku 5 zakrywający odpowiednio 9 lub 25 pól (czyli kwadratów jednostkowych, na które dzielimy dany kwadrat o boku 19), pokrywa tyle samo pola czarnego, co białego. Wniosek stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić takimi kwadratami, musiałaby zawierać taką samą powierzchnię białą i czarną.

Na rysunku 260 można prześledzić, że figura otoczona grubą linią zawiera tyle samo pola białego i czarnego. Zatem cały kwadrat ma pola białego o jedną jednostkę powierzchni więcej niż czarnego – bilans ten można odczytać z prostokąta 1×4 w prawym dolnym rogu.

Skoro więc kwadrat 19×19 nie zawiera takiej samej powierzchni pokrytej na białe, co na czarno, nie może być podzielony na kwadraty 3×3 i 5×5 .

Liczbowa wersja tego samego sposobu rozwiązania jest przedstawiona na rysunku 262, gdzie w pola kwadratu wpisano liczby będące bilansem powierzchni obydwu kolorów. Wówczas każdy kwadrat 3×3 lub 5×5 pokrywa pola z liczbami o sumie 0, a suma liczb wpisanych we wszystkie pola kwadratu jest równa -1 .

Sposób II: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 264. Wówczas każdy kwadrat 3×3 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, natomiast każdy kwadrat 5×5 pokrywa pola o sumie liczb równej 0 lub ± 5 , a więc podzielnej przez 5. Wynika stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić kwadratami o boku 3 lub 5, musiałaby zawierać pola o sumie liczb podzielnej przez 5.

Tymczasem suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 19 (figura obwiedziona grubą linią zawiera pola o sumie liczb równej 0, a w ostatnim wierszu jest 19 jedynek).

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

rys. 264

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

rys. 266

Sposób III: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 266. Wówczas każdy kwadrat 5×5 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, natomiast każdy kwadrat 3×3 pokrywa pola o sumie liczb równej 0 lub ± 3 , a więc podzielnej przez 3. Wynika stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić kwadratami o boku 3 lub 5, musiałaby zawierać pola o sumie liczb podzielnej przez 3.

Tymczasem suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 19 (figura obwiedziona grubą linią zawiera pola o sumie liczb równej 0, a w czwartym wierszu od dołu jest 19 jedynek).

Uwaga: Metody zastosowane w powyższym rozwiązaniu oraz w rozwiązaniu zadań poprzednich pozwalają udowodnić następujące twierdzenie: Niech m i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k niepodzielnej przez żadną z liczb m i n , kwadratu o boku k nie można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok m lub n .

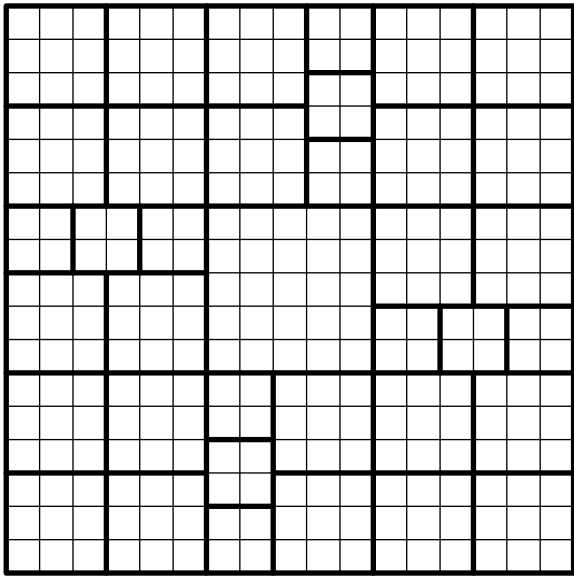
Zauważmy też, że gdy liczba k jest podzielna przez m lub przez n , kwadrat o boku k daje się w oczywisty sposób podzielić na jednakowe kwadraty o boku m lub n .

44. Czy kwadrat o boku długości 17 można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2, 3 lub 5?

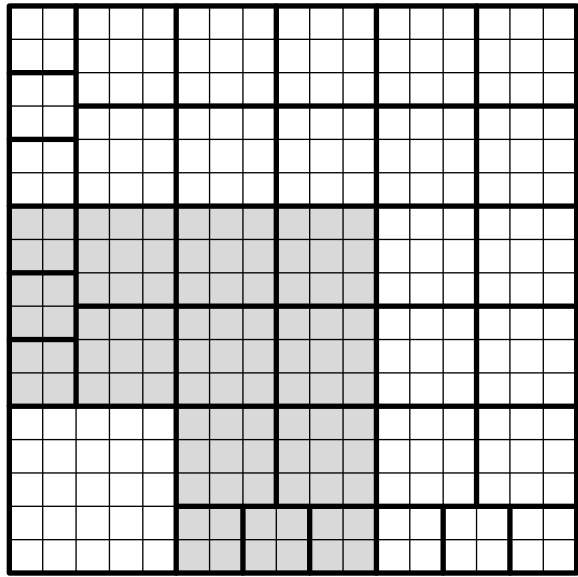
Rozwiązanie:

Odpowiedź: Podział kwadratu o boku długości 17 na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2, 3 lub 5, jest możliwy.

Sposób I: Kwadrat można podzielić jak na rysunku 268. Konstrukcja ta jest oparta na podziale kwadratu o boku 17 na kwadrat o boku 5 oraz cztery prostokąty o wymiarach 6×11 . Istotne jest przy tym spostrzeżenie, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ prostokąt o wymiarach $6 \times n$ można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2 lub 3.



rys. 268



rys. 280

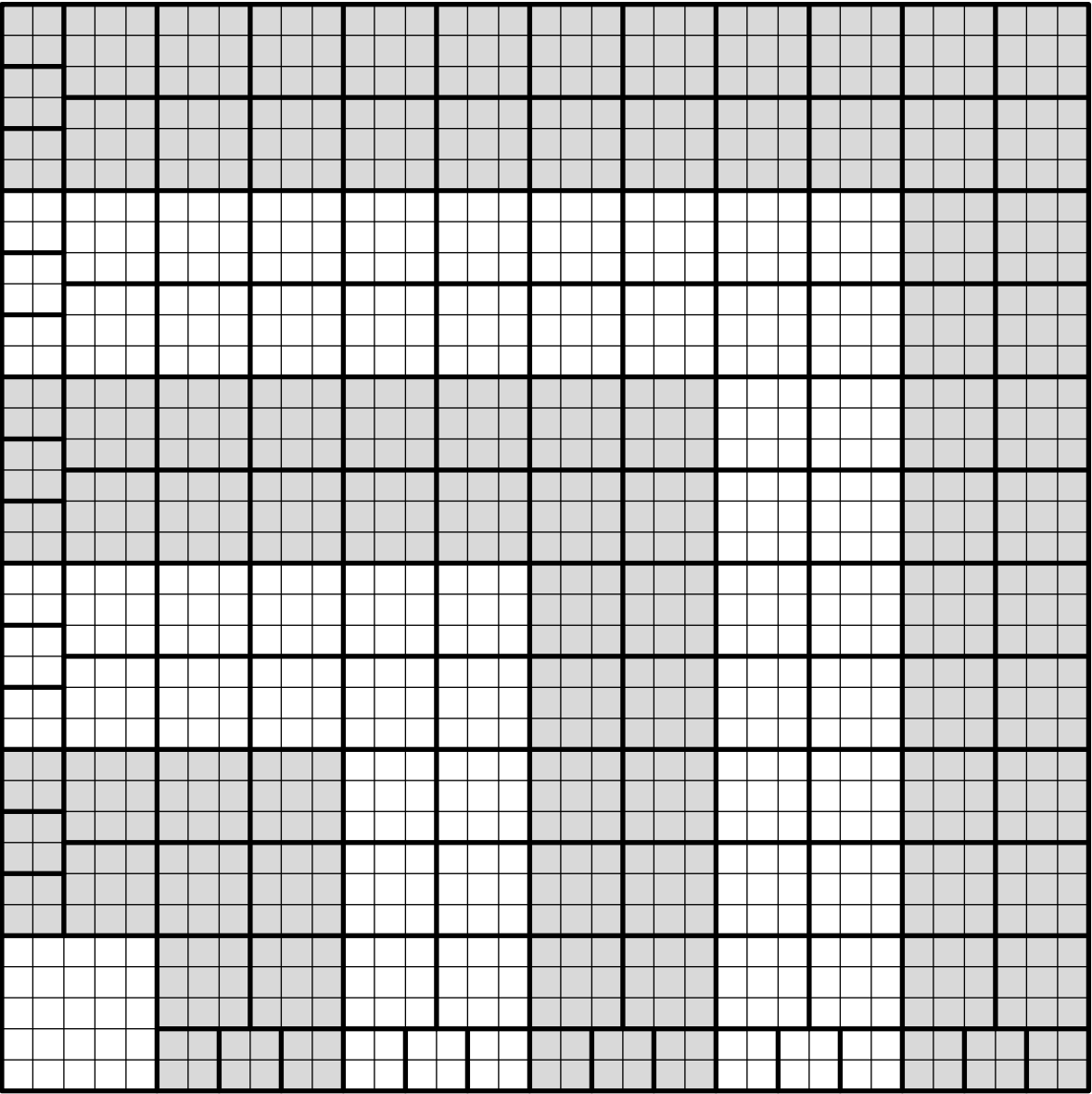
Na konstrukcję tę można też spojrzeć w inny sposób, dostrzegając jako jej podstawę podział kwadratu 17×17 na kwadrat 5×5 , cztery kwadraty 6×6 i cztery prostokąty 5×6 .

Sposób II: Inny sposób podziału jest pokazany na rysunku 280, gdzie kwadrat o boku 5 umieszczamy w narożu, a następnie obudowujemy go pasami o szerokości 6.

Uwagi: Konstrukcja przedstawiona w Sposobie II może zostać wykorzystana do udowodnienia, że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej k , kwadrat o boku $6k + 5$ można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2, 3 lub 5.

Kilka kroków tej konstrukcji jest przedstawionych na rysunku 282, gdzie pokazano podziały kwadratów o bokach 5, 11, 17, 23, 29, 35. Oczywiście podział kwadratu o boku 35 ma w tym kontekście tylko i wyłącznie walor prezentacji ogólnej konstrukcji, gdyż sam kwadrat o boku 35 można w oczywisty sposób podzielić na 49 kwadratów o boku 5.

Z uwagi do rozwiązania poprzedniego zadania wynika, że kwadratu o boku 17 nie da się podzielić na kwadraty o bokach 2, 3 lub 5 używając tylko dwóch rodzajów kwadratów – każdy podział musi zawierać co najmniej jeden kwadrat o boku 2, co najmniej jeden kwadrat o boku 3 i co najmniej jeden kwadrat o boku 5.



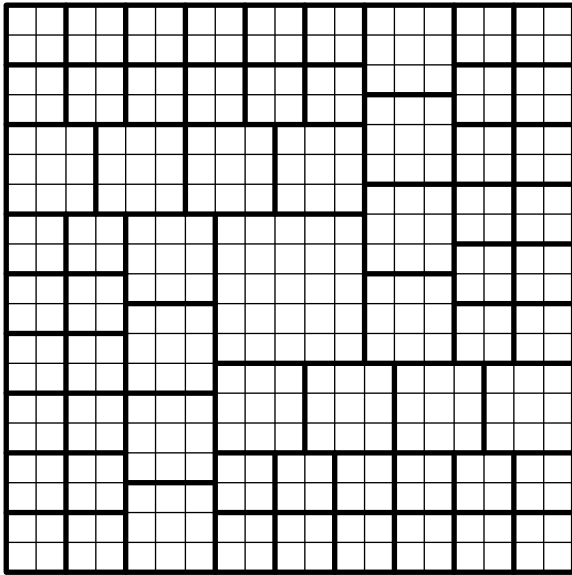
rys. 282

46. Czy kwadrat o boku długości 19 można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2, 3 lub 5?

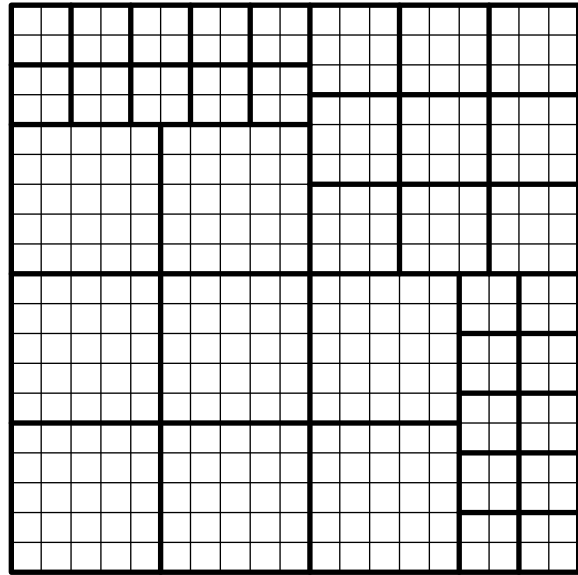
Rozwiązanie:

Odpowiedź: Podział kwadratu o boku długości 19 na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2, 3 lub 5, jest możliwy.

Sposób I: Kwadrat można podzielić jak na rysunku 284. Konstrukcja ta jest oparta na podziale kwadratu o boku 19 na kwadrat o boku 5 oraz cztery prostokąty o wymiarach 7×12 .



rys. 284



rys. 286

Sposób II: Inne rozwiązanie zadania jest przedstawione na rysunku 286. Konstrukcja ta jest oparta na podziale kwadratu 19×19 na kwadrat 9×9 , kwadrat 10×10 i dwa prostokąty 9×10 .

Sposób III: Jeszcze inny sposób podziału, będący częścią ogólniejszej konstrukcji, jest pokazany na rysunku 288.

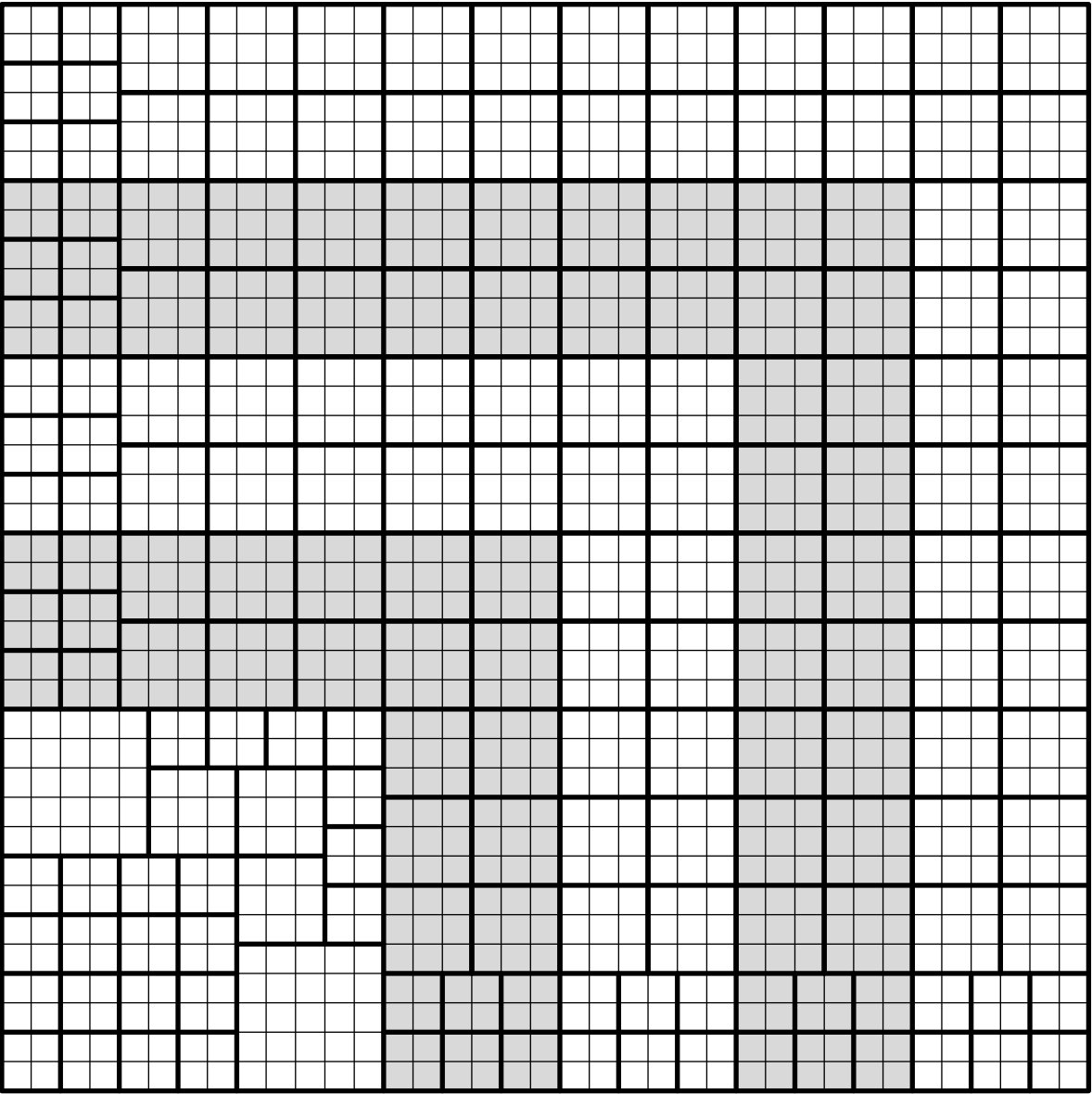
W lewym dolnym rogu widzimy kwadrat o boku 13 podzielony na kwadraty o bokach 2, 3 i 5. Następnie kwadrat ten jest obudowany pasami o szerokości 6 (złożonymi z kwadratów 2×2 i 3×3) w celu uzyskania kolejno kwadratów o bokach 19, 25, 31 i 37. W ten sposób pokazujemy metodę podziału kwadratu o boku $6k + 1$ dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 2$.

Uwaga: W połączeniu z uwagą do rozwiązania poprzedniego zadania otrzymujemy następujące twierdzenie:

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n różnej od 1 i 7, kwadrat o boku długości n można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2, 3 lub 5.

Uwzględniliśmy tu także trywialny przypadek liczby n podzielnej przez 2 lub 3.

Oczywiście podział kwadratu o boku 1 jest niemożliwy. Także podział kwadratu o boku 7 nie jest możliwy, gdyż jak już wiemy, taki podział musiałby wykorzystywać po co najmniej jednym kwadracie każdego z trzech rozmiarów, a kwadrat o boku 7 jest za mały, aby można w nim zmieścić niezachodzące na siebie kwadraty o bokach 3 i 5 (ułożone *po kratkach*).



rys. 288

48. Czy kwadrat o boku długości 19 można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2, 3 lub 5, przy czym kwadrat o boku 3 jest tylko jeden?

Rozwiązanie:

Sposób I: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 400. Wówczas suma liczb wpisanych w pola prostokąta obwiedzionego grubą linią jest równa 0. Poza tym prostokątem znajduje się 19 pól z jedynkami, skąd wynika, że suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 19.

Zauważmy też, że każdy kwadrat o boku 2 pokrywa pola o sumie liczb równej 0, każdy kwadrat o boku 3 pokrywa pola o sumie liczb równej ± 3 , a każdy kwadrat o boku 5 pokrywa pola o sumie liczb równej ± 5 . Oczywiście dopuszczamy tu tylko kwadraty narysowane *po kratkach*.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

rys. 400

Rozważanie sum liczb wpisanych w pola *modulo* 5 prowadzi do następujących wniosków:

- suma liczb wpisanych we wszystkie pola kwadratu daje resztę 4 przy dzieleniu przez 5,
- suma liczb wpisanych w pola pokryte przez kwadrat o boku 2 lub 5 jest podzielna przez 5,
- suma liczb wpisanych w pola pokryte przez kwadrat o boku 3 daje resztę 2 lub 3 przy dzieleniu przez 5.

Z powyższych spostrzeżeń wynika więc, że nie jest możliwy podział kwadratu o boku 19 na kwadraty o bokach 2 lub 5 oraz co najwyżej jeden kwadrat o boku 3.

Sposób II: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 402. Wówczas suma liczb wpisanych w pola figury obwiedzionej grubą linią jest równa 0. Poza tą figurą znajdują się 4 pola z jedynkami, skąd wynika, że suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 4.

Zauważmy też, że każdy kwadrat o boku 2 lub 5 pokrywa pola o sumie liczb równej 0, a każdy kwadrat o boku 3 pokrywa pola o sumie liczb równej ± 3 lub ± 2 . Stąd wniosek, że podział kwadratu o boku 19 na kwadraty o bokach 2 lub 5 oraz co najwyżej jeden kwadrat o boku 3 nie jest możliwy.

rys. 402

- 406 - *Jarosław Wróblewski* **Blok Olimpijski 2025/26, Nurt P** *Lista 2R*

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

rys. 404

Zauważmy też, że każdy kwadrat o boku 2 pokrywa pola o sumie liczb równej 0, każdy kwadrat o boku 3 pokrywa pola o sumie liczb równej ± 3 , a każdy kwadrat o boku 5 pokrywa pola o sumie liczb równej ± 5 . Jak zwykle w sytuacji, gdy mówimy o polach, dopuszczamy tu tylko kwadraty narysowane *po kratkach*.

Z powyższych obserwacji wynika, że przy podziale kwadratu o boku 24 na kwadraty o bokach 2, 3, 5, suma liczb wpisanych w pola wszystkich kwadratów o boku 5 jest podzielna przez 3. A to jest niemożliwe, gdyby był dokładnie jeden taki kwadrat.

Sposób II: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 406. Wówczas suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 0.

Zauważmy też, że każdy kwadrat o boku 2 lub 3 pokrywa pola o sumie liczb równej 0, a każdy kwadrat o boku 5 pokrywa pola o sumie liczb równej ± 1 lub ± 2 . Stąd wniosek,

że podział kwadratu o boku 24 na kwadraty o bokach 2 lub 3 oraz dokładnie jeden kwadrat o boku 5 nie jest możliwy.

-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2

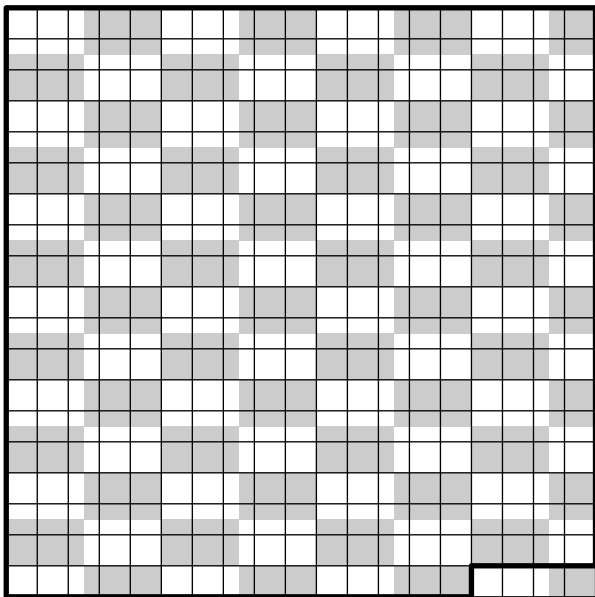
rys. 406

62. Czy sześcian o krawędzi długości 19 można podzielić na sześciany, z których każdy ma krawędź długości 2, 3 lub 5?

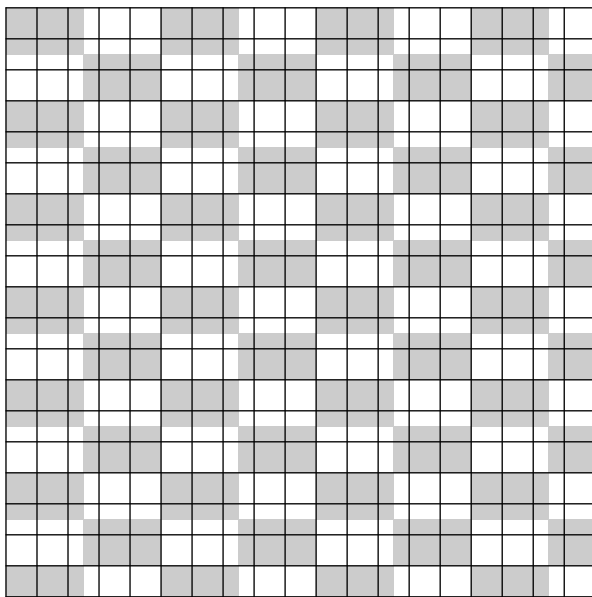
Rozwiązanie:

Wykażemy, że podział sześcianu o krawędzi długości 19 na sześciany, z których każdy ma krawędź długości 2, 3 lub 5, nie jest możliwy.

Sposób I: Pokolorujemy sześcian w trójwymiarową szachownicę zamalowując na czarno i biało prostopadłości o wymiarach $1 \times 1, 5 \times 2, 5$. Jak to robimy? Otóż wyobraźmy sobie, że duży sześcian jest podzielony na 19^3 sześcianików jednostkowych (zwanymi dalej polami, przez analogię do sytuacji dwuwymiarowej). W ten sposób powstaje 19 warstw prostopadłościennych o wymiarach $1 \times 19 \times 19$ złożonych z $19^2 = 361$ pól każda. Pola co drugiej warstwy, poczynając od górnej, malujemy jak na rysunku 408. Pola każdej z pozostałych 9 warstw malujemy jak na rysunku 420.



rys. 408



rys. 420

Wówczas każdy sześcian o krawędzi 2, 3 lub 5 zakrywający odpowiednio 8, 27 lub 125 pól, pokrywa tyle samo objętości czarnej, co białej. Wniosek stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić takimi sześcianami, musiałaby zawierać taką samą objętość białą i czarną.

Osiemnaście warstw od góry zawiera tyle samo objętości obu kolorów. Co do dziewnastej warstwy (tej na samym dole), to na rysunku 408 można prześledzić, że figura otoczona grubą linią zawiera tyle samo objętości białej i czarnej. Zatem cały sześcian ma o jedną jednostkę objętości więcej bieli niż czerni – bilans ten można odczytać z prostopadłości o wymiarach $1 \times 1 \times 4$, przedstawionego w prawym dolnym rogu rysunku 408 jako prostokąt 1×4 .

Skoro więc sześcian $19 \times 19 \times 19$ nie zawiera takiej samej objętości zamalowanej na białą, co na czarno, nie może być podzielony na sześciany $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$ i $5 \times 5 \times 5$.

Liczbowa wersja tego samego sposobu rozwiązania jest przedstawiona na rysunkach 422 i 424, gdzie w pola sześcianu wpisano liczby będące bilansem objętości obydwu kolorów. Wówczas każdy sześcian $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$ lub $5 \times 5 \times 5$ pokrywa pola z liczbami o sumie 0,

a suma liczb wpisanych we wszystkie pola sześcianu jest równa -1 .

[illegible]

rys. 422

[illegible]

rys. 424

Sposób II: W pola każdej warstwy wpisujemy liczby jak na rysunku 422. Oznacza to, że każdy pionowy prostopadłościan $1 \times 1 \times 19$ zawierający 19 pól ma we wszystkie pola wpisana tę samą liczbę. Zatem suma liczb wpisanych we wszystkie pola sześciangu jest równa -19 .

Ponadto każdy szescian $3 \times 3 \times 3$ lub $5 \times 5 \times 5$ zajmujący odpowiednio 27 lub 125 pól, pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0. Natomiast każdy 8-polowy sześciian $2 \times 2 \times 2$ pokrywa pola o parzystej sumie liczb.

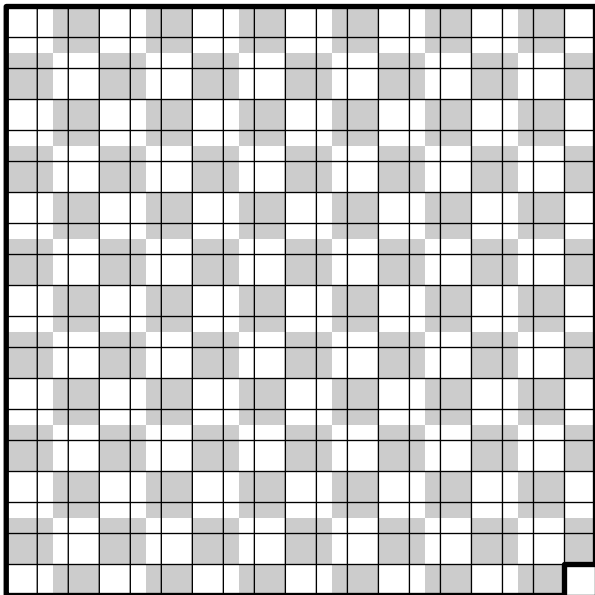
Skoro więc duży sześcián ma nieparzystą sumę liczb wpisanych w pola, a każdy dopuszczalny sześcián podziału pokrywa pola o parzystej sumie liczb, podział spełniający warunki zadania nie jest możliwy.

Uwaga: Modyfikacja powyższych rozwiązań pozwala uzyskać wynik mocniejszy: Sześcianu $19 \times 19 \times 19$ nie da się wypełnić prostopadłościanami $1 \times 1 \times 2$ ustawionymi pionowo, prostopadłościanami $1 \times 1 \times 5$ ustawionymi poziomo (wszerz), i prostopadłościanami $1 \times 1 \times 3$ ustawionymi poziomo (w głąb).

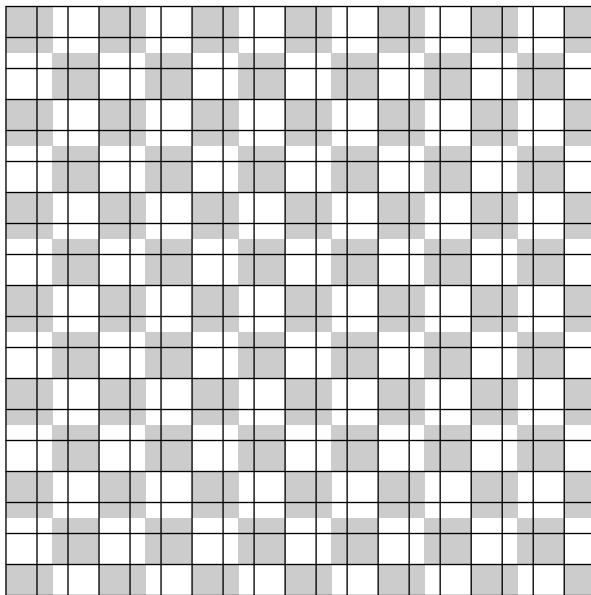
64. Czy sześcián o krawędzi długości 19 można podzielić na figury, z których każda jest sześciánem o krawędzi 2 lub prostopadłościánem o wymiarach $3 \times 3 \times 1$?

Rozwiązanie:

Wykażemy, że podział sześciangu o krawędzi długości 19 na sześciangany o krawędzi 2 i prostopadłościany $3 \times 3 \times 1$ nie jest możliwy.



rys. 426



rys. 428

Sposób I: Pokolorujemy sześcián w trójwymiarową szachownicę zamalowując na czarno i biało prostopadłościány rozmiaru $1 \times 1,5 \times 1,5$. Założmy przy tym, że duży sześcián jest podzielony na 19^3 sześciáników jednostkowych zwanych dalej polami. W ten sposób powstaje 19 warstw prostopadłościennych o wymiarach $1 \times 19 \times 19$ złożonych z $19^2 = 361$ pól każda. Pola co drugiej warstwy, poczynając od górnej, malujemy jak na rysunku 426. Pola każdej z pozostałych 9 warstw malujemy jak na rysunku 428.

Wówczas każdy sześcián o krawędzi 2 zakrywający 8 pól, a także każdy 9-polowy prostopadłościán $3 \times 3 \times 1$, pokrywa tyle samo objętości czarnej, co białej. Wniosek stąd, że gdyby duży sześcián dało się szczelnie wypełnić takimi figurami, to musiałby on zawierać taką samą objętość białą i czarną.

Osiemnaście warstw od góry zawiera tyle samo objętości obu kolorów. Co do dziewiętnastej warstwy (tej na samym dole), to na rysunku 426 można prześledzić, że figura otoczona grubą linią zawiera tyle samo objętości białej i czarnej. Zatem cały sześcián ma o jedną jednostkę objętości więcej bieli niż czerni – bilans ten można odczytać z sześciánu $1 \times 1 \times 1$, przedstawionego w prawym dolnym rogu rysunku 426 jako kwadrat 1×1 .

Skoro więc sześcián $19 \times 19 \times 19$ nie zawiera takiej samej objętości zamalowanej na biało, co na czarno, nie może być podzielony na sześciány $2 \times 2 \times 2$ i prostopadłościány $3 \times 3 \times 1$.

Liczbowa wersja tego samego sposobu rozwiązania jest przedstawiona na rysunkach 440 i 442, gdzie w pola sześciánu wpisano liczby będące bilansem objętości obydwu kolorów. Wówczas każdy sześcián $2 \times 2 \times 2$ i każdy prostopadłościán $3 \times 3 \times 1$ pokrywa pola z liczbami o sumie 0, a suma liczb wpisanych we wszystkie pola sześciánu jest równa -1 .

-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1

rys. 440

[illegible]

rys. 442

Sposób II: W pola każdej warstwy wpisujemy liczby jak na rysunku 440. Oznacza to, że każdy pionowy prostopadłościan $1 \times 1 \times 19$ zawierający 19 pól ma we wszystkie pola wpisana tę samą liczbę. Wtedy suma liczb wpisanych we wszystkie pola sześcianu jest równa -19 . Ponadto każdy prostopadłościan $3 \times 3 \times 1$ zajmujący 9 pól, pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0. Natomiast każdy 8-polowy sześcian $2 \times 2 \times 2$ pokrywa pola o parzystej sumie liczb.

Skoro więc duży sześciąt ma nieparzystą sumę liczb wpisanych w pola, a każdy dopuszczalny prostopadłościan podziału pokrywa pola o parzystej sumie liczb, podział spełniający warunki zadania nie jest możliwy.

66. Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n niepodzielna przez 2, 3, 5 ani 7, że sześcian o krawędzi długości n można podzielić na sześciany, z których każdy ma krawędź długości 2, 3, 5 lub 7?

Rozwiązanie:

Udowodnimy istnienie takiej liczby całkowitej dodatniej n niepodzielnej przez 2, 3, 5 ani 7, że sześcian o krawędzi długości n można podzielić na sześciany, z których każdy ma krawędź długości 2, 3, 5 lub 7.

Przeprowadzimy konstrukcję polegającą na budowaniu coraz większych prostopadłościanów, biorąc za punkt wyjścia sześciany o krawędziach 2, 3, 5 i 7. Poniższa tabela przedstawia krok po kroku tworzenie kolejnych prostopadłościanów:

Budulce	Budowany prostopadłościan	Warunki
$2 \times 2 \times 2$	$30 \times 6 \times 2$	
$3 \times 3 \times 3$	$30 \times 6 \times 3$	
$30 \times 6 \times 2, \quad 30 \times 6 \times 3$	$30 \times 6 \times N$	$N \geq 2$
$2 \times 2 \times 2$	$30 \times 10 \times 2$	
$5 \times 5 \times 5$	$30 \times 10 \times 5$	
$30 \times 10 \times 2, \quad 30 \times 10 \times 5$	$30 \times 10 \times N$	$N \geq 4$
$3 \times 3 \times 3$	$30 \times 15 \times 3$	
$5 \times 5 \times 5$	$30 \times 15 \times 5$	
$30 \times 15 \times 3, \quad 30 \times 15 \times 5$	$30 \times 15 \times N$	$N \geq 8$
$30 \times 6 \times N, \quad 30 \times 10 \times N, \quad 30 \times 15 \times N$	$30 \times N \times N$	$N \geq 30$
$2 \times 2 \times 2$	$42 \times 6 \times 2$	
$3 \times 3 \times 3$	$42 \times 6 \times 3$	
$42 \times 6 \times 2, \quad 42 \times 6 \times 3$	$42 \times 6 \times N$	$N \geq 2$
$2 \times 2 \times 2$	$42 \times 14 \times 2$	
$7 \times 7 \times 7$	$42 \times 14 \times 7$	
$42 \times 14 \times 2, \quad 42 \times 14 \times 7$	$42 \times 14 \times N$	$N \geq 6$
$3 \times 3 \times 3$	$42 \times 21 \times 3$	
$7 \times 7 \times 7$	$42 \times 21 \times 7$	
$42 \times 21 \times 3, \quad 42 \times 21 \times 7$	$42 \times 21 \times N$	$N \geq 12$
$42 \times 6 \times N, \quad 42 \times 14 \times N, \quad 42 \times 21 \times N$	$42 \times N \times N$	$N \geq 44$
$2 \times 2 \times 2$	$70 \times 10 \times 2$	
$5 \times 5 \times 5$	$70 \times 10 \times 5$	
$70 \times 10 \times 2, \quad 70 \times 10 \times 5$	$70 \times 10 \times N$	$N \geq 4$
$2 \times 2 \times 2$	$70 \times 14 \times 2$	
$7 \times 7 \times 7$	$70 \times 14 \times 7$	
$70 \times 14 \times 2, \quad 70 \times 14 \times 7$	$70 \times 14 \times N$	$N \geq 6$
$5 \times 5 \times 5$	$70 \times 35 \times 5$	
$7 \times 7 \times 7$	$70 \times 35 \times 7$	
$70 \times 35 \times 5, \quad 70 \times 35 \times 7$	$70 \times 35 \times N$	$N \geq 24$
$70 \times 10 \times N, \quad 70 \times 14 \times N, \quad 70 \times 35 \times N$	$70 \times N \times N$	$N \geq 82$
$3 \times 3 \times 3$	$105 \times 15 \times 3$	
$5 \times 5 \times 5$	$105 \times 15 \times 5$	
$105 \times 15 \times 3, \quad 105 \times 15 \times 5$	$105 \times 15 \times N$	$N \geq 8$
$3 \times 3 \times 3$	$105 \times 21 \times 3$	
$7 \times 7 \times 7$	$105 \times 21 \times 7$	
$105 \times 21 \times 3, \quad 105 \times 21 \times 7$	$105 \times 21 \times N$	$N \geq 12$
$5 \times 5 \times 5$	$105 \times 35 \times 5$	
$7 \times 7 \times 7$	$105 \times 35 \times 7$	
$105 \times 35 \times 5, \quad 105 \times 35 \times 7$	$105 \times 35 \times N$	$N \geq 24$
$105 \times 15 \times N, \quad 105 \times 21 \times N, \quad 105 \times 35 \times N$	$105 \times N \times N$	$N \geq 140$

W ostatnim kroku konstrukcji składamy sześcian z prostopadłościanów o wymiarach $30 \times N \times N$, $42 \times N \times N$, $70 \times N \times N$ i $105 \times N \times N$. Jeżeli użyjemy po jednym prostopadłościanie każdego rodzaju, otrzymamy prostopadłościan o wymiarach $247 \times N \times N$, który dla $N = 247$ jest sześcianem. Pozostaje zauważyć, że liczba 247 nie jest podzielna przez żadną z liczb 2, 3, 5, 7.

Uwagi: Ograniczenia na N podane w kolumnie "Warunki" mają jedynie charakter ciekawostkowo-informacyjny, a zrozumienie ich źródła nie jest istotne dla przeprowadzanego dowodu. Dla kompletności rozwiązania wystarczy sprawdzić, że każdorazowo można przyjąć $N = 247$.

Ponieważ każda liczba naturalna $n \geq 384$ jest postaci $30a + 42b + 70c + 105d$, gdzie a, b, c, d są nieujemnymi liczbami całkowitymi, każdy sześcian o całkowitoliczbowej długości krawędzi $n \geq 384$ daje się podzielić na sześciany o krawędziach 2, 3, 5 i 7.

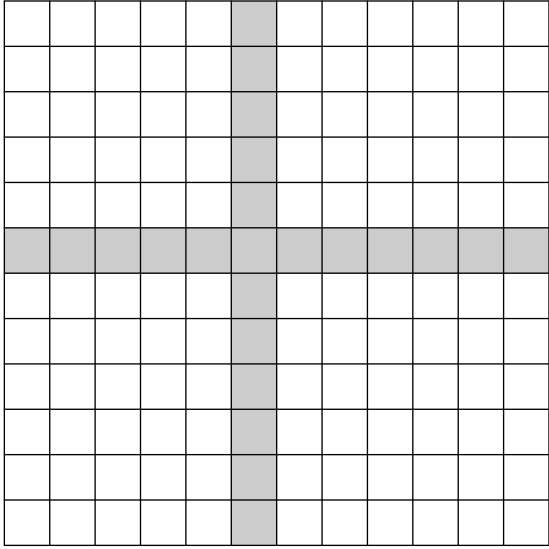
68. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 12 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 .

Rozwiązanie:

Wykażemy, że podział kwadratu o boku 12 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 , nie jest możliwy.

Sposób I:

Podzielmy kwadrat o boku 12 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 444. Wówczas każdy prostokąt 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole albo pokrywa same zamalowane pola. Tak czy owak liczba zamalowanych pól pokrywanych przez prostokąt jest nieparzysta. Gdyby więc istniał podział kwadratu o boku 12 na prostokąty 1×9 i 1×11 , musiałoby być nieparzyste wiele prostokątów podziału, gdyż zamalowanych jest nieparzyste wiele pól (zamalowane są 23 pola). Z drugiej zaś strony każdy prostokąt o wymiarach 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa nieparzyste wiele pól, a skoro liczba wszystkich pól dużego kwadratu jest parzysta (kwadrat zawiera 144 pola), liczba prostokątów podziału musiałaby być parzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że podział kwadratu o boku 12 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.



rys. 444

Sposób II:

Podzielmy kwadrat o boku 12 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 444. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa 0, 8 lub 10 niezamalowanych pól, czyli parzystą liczbę niezamalowanych pól. Tymczasem liczba wszystkich niezamalowanych pól jest nieparzysta (niezamalowanych pól jest 121). To dowodzi, że podział kwadratu o boku 12 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

1	-1	1	-1						1	-1	1
-1	1	-1	1						-1	1	-1
1	-1	1	-1						1	-1	1
-1	1	-1	1						-1	1	-1
1	-1	1	-1						1	-1	1
-1	1	-1	1						-1	1	-1
1	-1	1	-1						1	-1	1

rys. 446

Sposób III:

Podzielmy kwadrat o boku 12 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie wpisujemy w pola liczby jak na rysunku 446. Puste pola traktujemy tak, jak gdyby wpisana w nie była liczba 0. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0. Tymczasem suma

wszystkich liczb wpisanych w pola dużego kwadratu jest równa 1, a więc jest różna od zera. To dowodzi, że podział kwadratu o boku 12 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

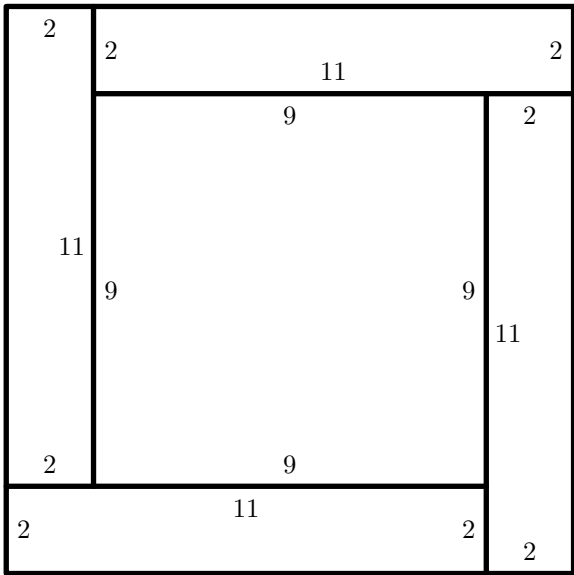
80. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 13 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 .

Rozwiązanie:

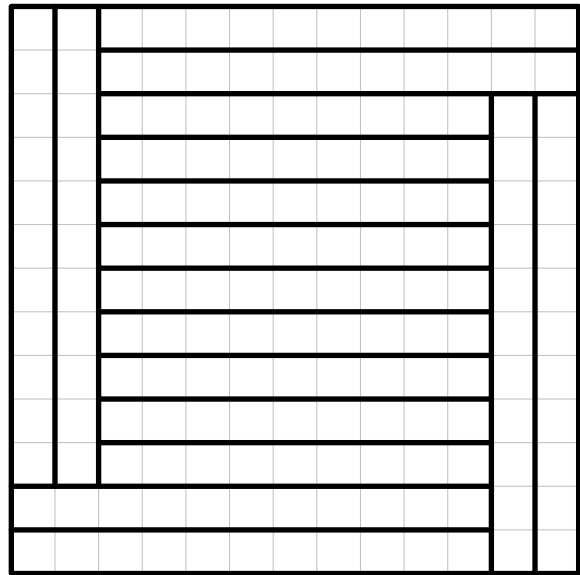
Wykażemy, że podział kwadratu o boku 13 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 , jest możliwy.

Sposób I:

Zauważmy, że kwadrat o boku 13 można podzielić na kwadrat o boku 9 i cztery prostokąty o wymiarach 2×11 jak na rysunku 448. To prowadzi do przedstawionego na rysunku 460 podziału kwadratu o boku 13 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 .



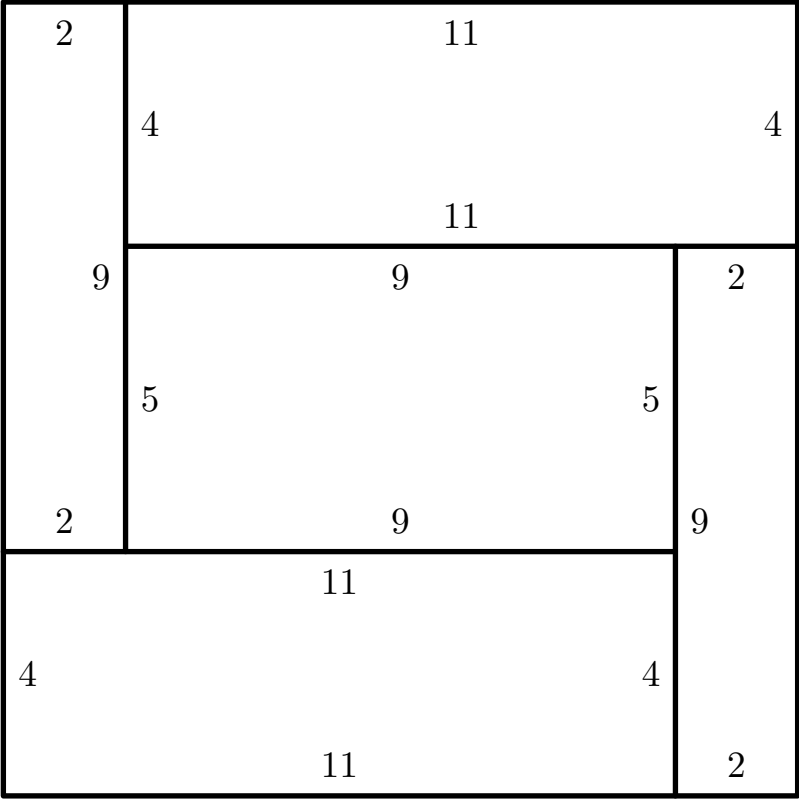
rys. 448



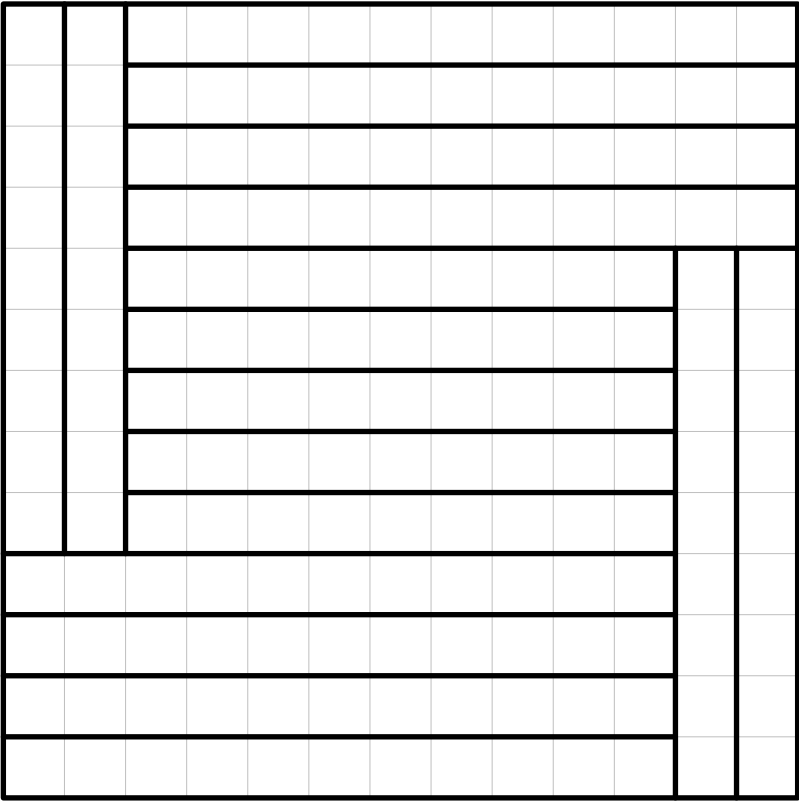
rys. 460

Sposób II:

Zauważmy, że kwadrat o boku 13 można podzielić na prostokąt o wymiarach 5×9 , dwa prostokąty 4×11 i dwa prostokąty 2×9 jak na rysunku 462. To prowadzi do przedstawionego na rysunku 464 podziału kwadratu o boku 13 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 .



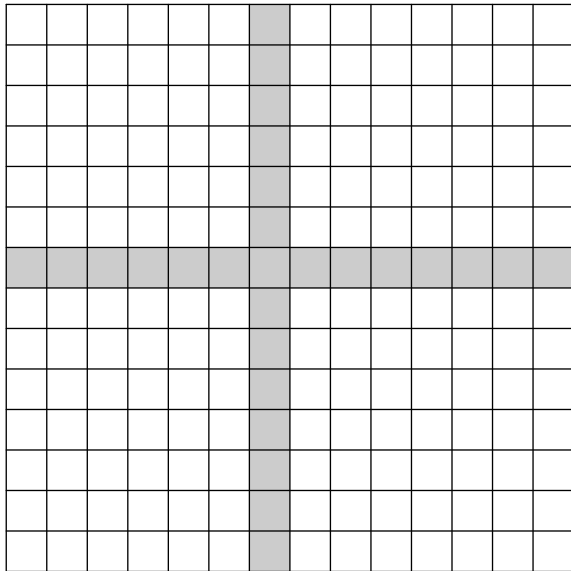
rys. 462



rys. 464

82. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 14 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 .

Rozwiązanie:
Wykażemy, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 , nie jest możliwy.



rys. 466

1	-1	1	-1	1	-1					1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1					-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1					-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1					-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1					-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1					-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1					1	-1	1	-1	1

rys. 468

Sposób I:

Podzielmy kwadrat o boku 14 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 466. Wówczas każdy prostokąt 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole albo pokrywa same zamalowane pola. Tak czy owak liczba zamalowanych pól pokrywanych przez prostokąt jest nieparzysta. Gdyby więc istniał podział kwadratu o boku 14 na prostokąty 1×9 i 1×11 , musiałoby być nieparzyste wiele prostokątów podziału, gdyż zamalowanych jest nieparzyste wiele pól (zamalowanych jest 27 pól). Z drugiej zaś strony każdy prostokąt 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa nieparzyste wiele pól, a skoro liczba wszystkich pól dużego kwadratu jest parzysta (kwadrat zawiera 196 pól), liczba prostokątów podziału musiałaby być parzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób II:

Podzielmy kwadrat o boku 14 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 466. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa 0, 8 lub 10 niezamalowanych pól, czyli parzyste wiele niezamalowanych pól. Tymczasem liczba wszystkich niezamalowanych pól jest nieparzysta (niezamalowanych pól jest 169). To dowodzi, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

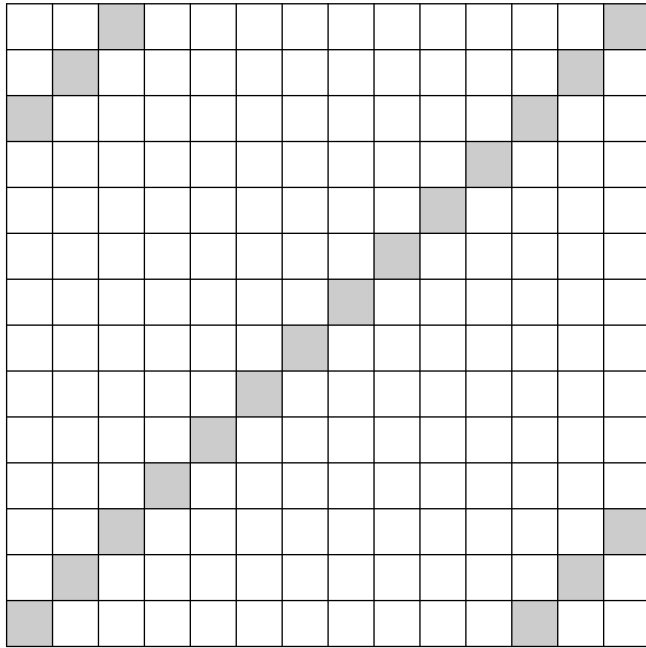
Sposób III:

Podzielmy kwadrat o boku 14 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie wpisemy w pola liczby jak na rysunku 468. Puste pola traktujemy tak, jak gdyby wpisana w nie była liczba 0. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0. Tymczasem suma

wszystkich liczb wpisanych w pola dużego kwadratu jest równa 1, a więc jest różna od zera. To dowodzi, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób IV:

Podzielmy kwadrat o boku 14 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 466. Przypuśćmy, że podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 jest możliwy. Wówczas dokładnie jeden prostokąt podziału zawiera same zamalowane pola (jest ich 9 lub 11), a każdy z pozostałych prostokątów zawiera dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych jest 27 pól, prostokątów podziału musi być 17 lub 19.



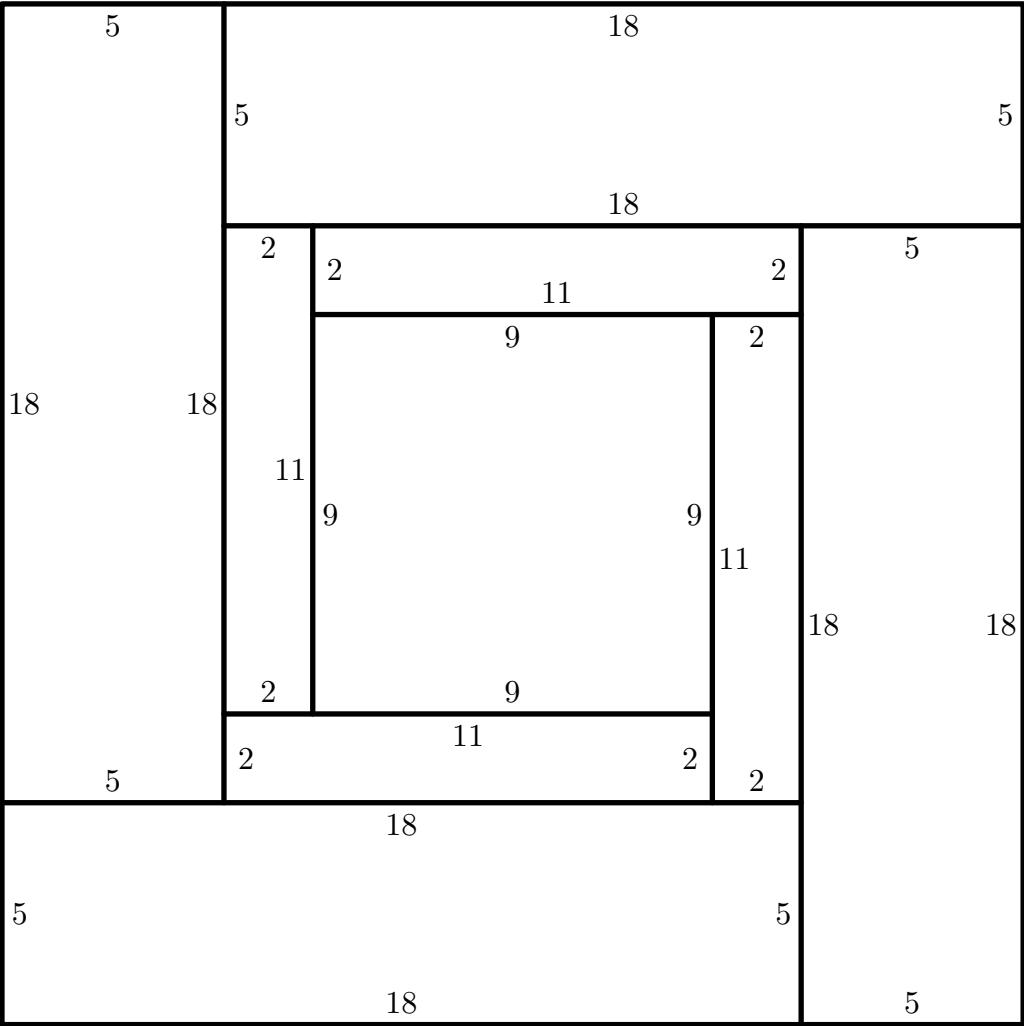
rys. 480

Pokolorujmy teraz pola jak na rysunku 480. Wówczas każdy prostokąt 1×11 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole, a każdy prostokąt 1×9 ułożony po kratkach pokrywa co najwyżej jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych jest 20 pól, podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 musi składać się z co najmniej 20 prostokątów. To stoi w sprzeczności z uzyskaną wcześniej liczbą prostokątów podziału jako jedną z liczb 17 i 19. Tym samym wykazaliśmy, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

84. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 23 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 .

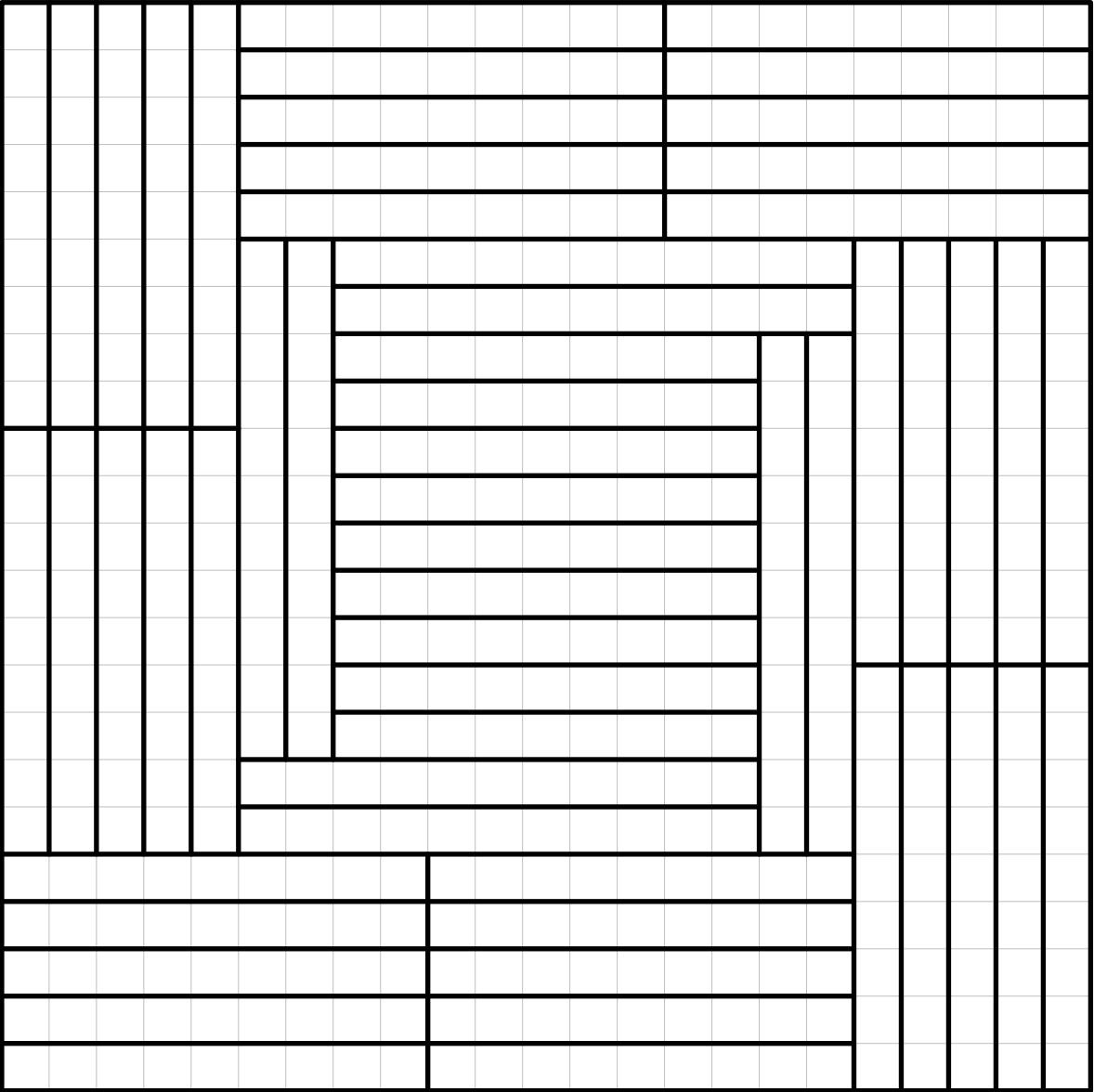
Rozwiązanie:

Wykażemy, że podział kwadratu o boku 23 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 , jest możliwy.



rys. 482

Zauważmy, że kwadrat o boku 23 można podzielić na kwadrat o boku 13 i cztery prostokąty o wymiarach 5×18 , a występujący w tym podziale kwadrat o boku 13 można dalej podzielić na kwadrat o boku 9 i cztery prostokąty o wymiarach 2×11 , co daje podział jak na rysunku 482. To prowadzi do przedstawionego na rysunku 484 podziału kwadratu o boku 23 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 .



rys. 484

Uwaga:

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy dwukrotnie następujący schemat konstrukcji:

Z kwadratu o boku a i prostokątów o wymiarach $1 \times b$, gdzie $b > a$, można zbudować kwadrat o boku $2b - a$. Lub inaczej: można zbudować kwadrat o takim boku c , że liczby a, b, c tworzą postęp arytmetyczny.

W pierwszym kroku z kwadratu o boku 9 i prostokątów o wymiarach 1×11 budujemy kwadrat o boku 13. W drugim kroku z kwadratu o boku 13 i prostokątów o wymiarach 1×18 budujemy kwadrat o boku 23.

86. Rozstrzygnij, czy sześcian o krawędzi 16 można podzielić na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1 \times 1 \times 9$ lub $1 \times 1 \times 11$.

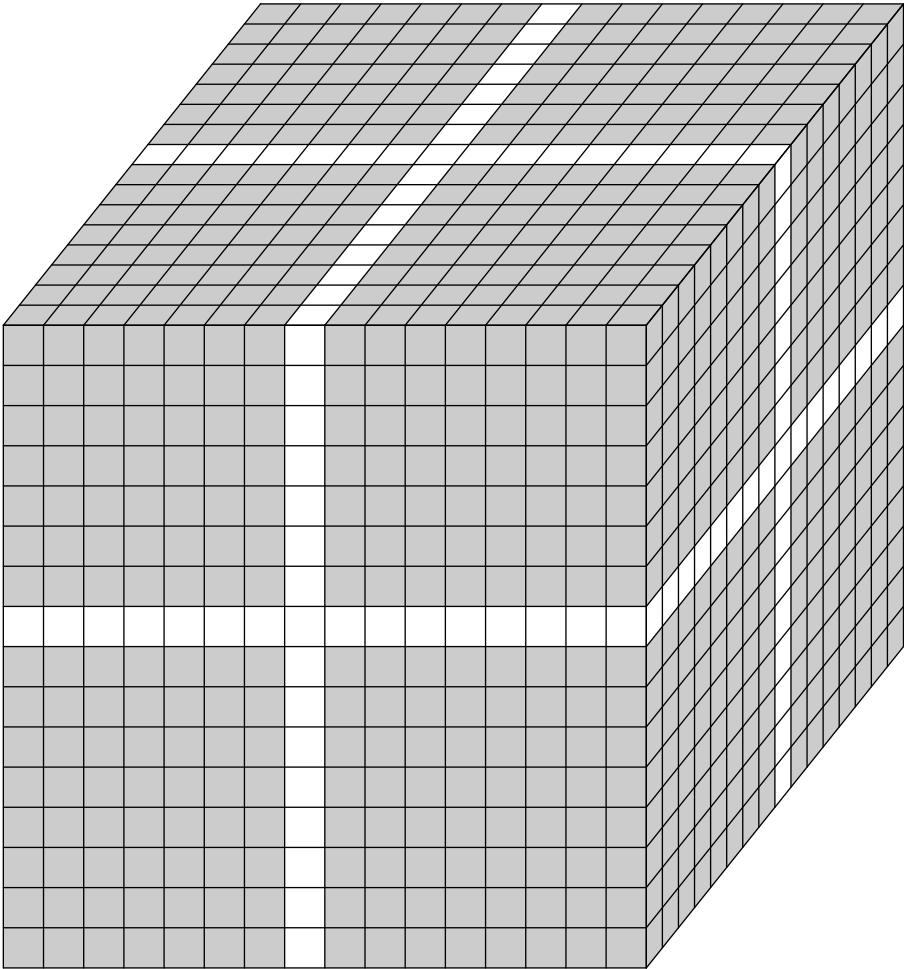
Rozwiązanie:

Wykażemy, że podział sześcianu o krawędzi 16 na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1 \times 1 \times 9$ lub $1 \times 1 \times 11$, nie jest możliwy.

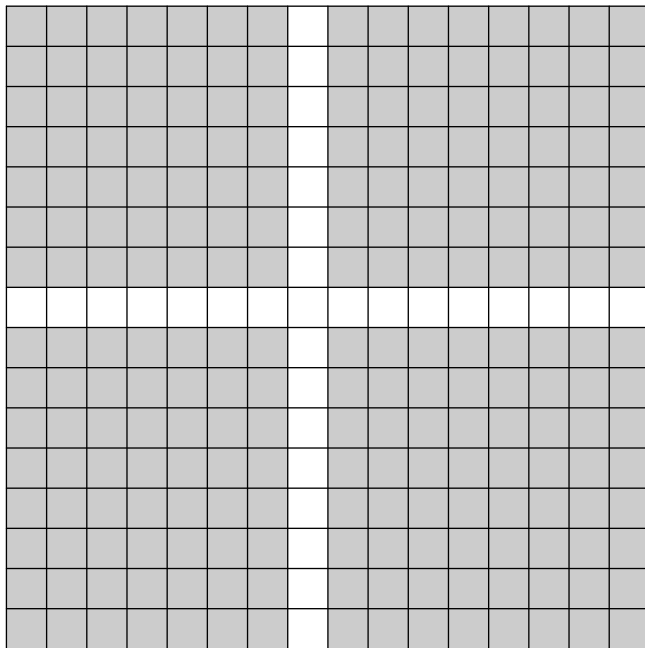
Podzielmy sześcian o krawędzi 16 na sześciiany jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 486. Dokładniej, każda warstwa oprócz ósmej od góry jest pokolorowana tak jak na rysunku 488, natomiast pola warstwy ósmej nie są pokolorowane.

Wówczas każdy prostopadłościan o wymiarach $1 \times 1 \times 9$ ułożony w danym sześcianie po kratkach pokrywa 9 pól niezamalowanych albo jedno pole niezamalowane i 8 zamalowanych. Z kolei każdy prostopadłościan o wymiarach $1 \times 1 \times 11$ ułożony po kratkach pokrywa 11 pól niezamalowanych albo jedno pole niezamalowane i 10 zamalowanych. Wynika stąd, że prostopadłościany dopuszczalnych rozmiarów pokrywają 0, 8 lub 10 zamalowanych pól, a więc parzystą ich liczbę. Tymczasem liczba zamalowanych pól w całym sześcianie o krawędzi 16 jest równa 15^3 , a zatem jest nieparzysta.

To dowodzi, że podział sześcianu o krawędzi 16 na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1 \times 1 \times 9$ lub $1 \times 1 \times 11$, nie jest możliwy.



rys. 486



rys. 488

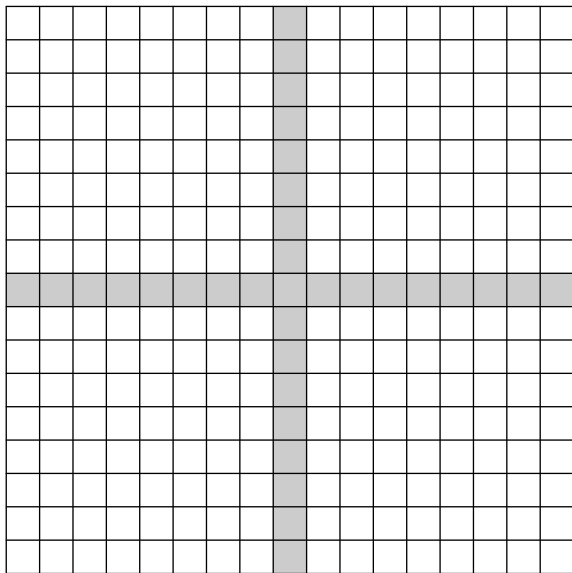
88. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 17 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 .

Rozwiązanie:

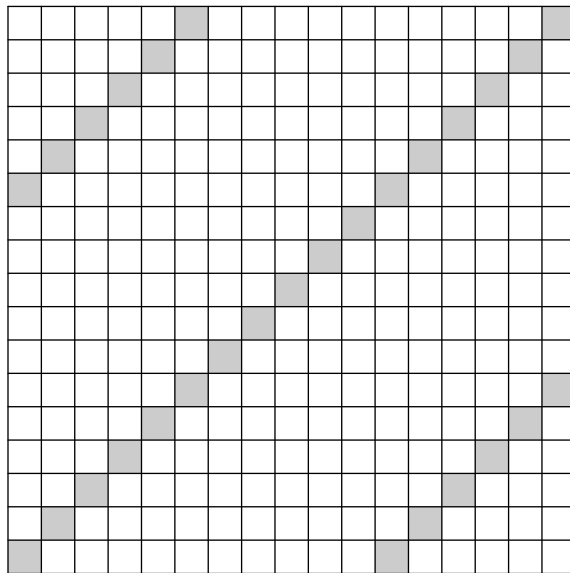
Wykażemy, że podział kwadratu o boku 17 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11 , nie jest możliwy.

Sposób I:

Podzielmy kwadrat o boku 17 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 600. Przypuśćmy, że podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 jest możliwy. Wówczas dokładnie jeden prostokąt podziału zawiera same zamalowane pola (jest ich 9 lub 11), a każdy z pozostałych prostokątów zawiera dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowane są 33 pola, prostokątów podziału musi być 23 lub 25.



rys. 600



rys. 602

Pokolorujmy teraz pola jak na rysunku 602. Wówczas każdy prostokąt 1×11 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole, a każdy prostokąt 1×9 ułożony po kratkach pokrywa co najwyżej jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych jest 29 pól, podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 musi składać się z co najmniej 29 prostokątów. To stoi w sprzeczności z uzyskaną wcześniej liczbą prostokątów podziału jako jedną z liczb 23 i 25. Tym samym wykazaliśmy, że podział kwadratu o boku 17 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób II:

Podzielmy kwadrat o boku 17 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 600. Przypuśćmy, że podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 jest możliwy. Wówczas dokładnie jeden prostokąt podziału zawiera same zamalowane pola (jest ich 9 lub 11), a każdy z pozostałych prostokątów zawiera dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowane są 33 pola, prostokątów podziału musi być 23 lub 25.

Zatem prostokąty podziału pokrywają co najwyżej $25 \cdot 11 = 275$ pól, podczas gdy kwadrat o boku 17 składa się z 289 pól. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że podział kwadratu o boku 17 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób III:

Podzielmy kwadrat o boku 17 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie wpisemy w pola liczby jak na rysunku 604. Wówczas każdy prostokąt 1×9 ułożony po kratkach pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0 lub -2 , a każdy prostokąt 1×11 ułożony po kratkach pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0 lub -20 . Przy tym suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 16. Nie można

więc podzielić kwadratu o dodatniej sumie liczb na prostokąty zawierające pola o sumie niedodatniej.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	80	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1

rys. 604

200. Rozstrzygnij, czy sześcián o krawędzi 17 można podzielić na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1 \times 1 \times 9$ lub $1 \times 1 \times 11$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że podział sześciánu o krawędzi 17 na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1 \times 1 \times 9$ lub $1 \times 1 \times 11$, jest możliwy.

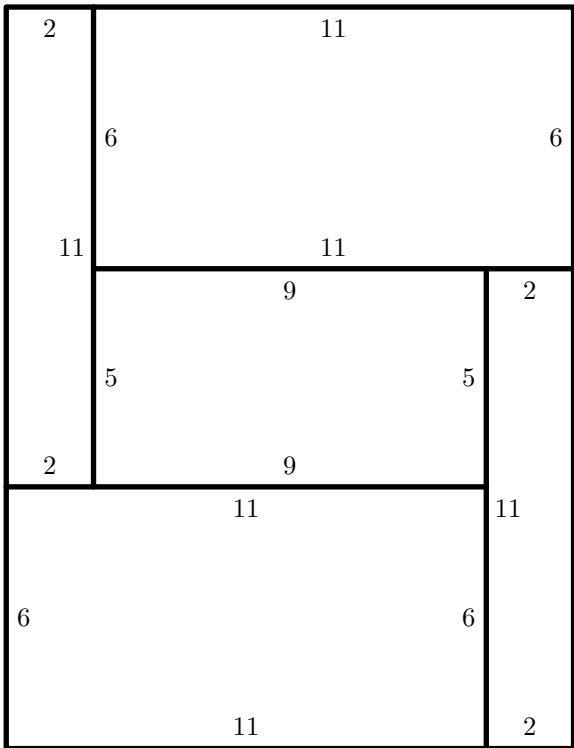
W celu skonstruowania odpowiedniego podziału przestrzennego, najpierw rozwiążemy dwa zadania płaskie.

Po pierwsze zauważmy, że prostokąt o wymiarach 13×17 można podzielić na prostokąt o wymiarach 5×9 , dwa prostokąty o wymiarach 6×11 oraz dwa prostokąty o wymiarach 2×11 jak na rysunku 606. To prowadzi do przedstawionego na rysunku 608 podziału prostokąta o wymiarach 13×17 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 . Należy przy tym podkreślić, że możliwość podziału prostokąta 13×17 na prostokąty 1×9 i 1×11

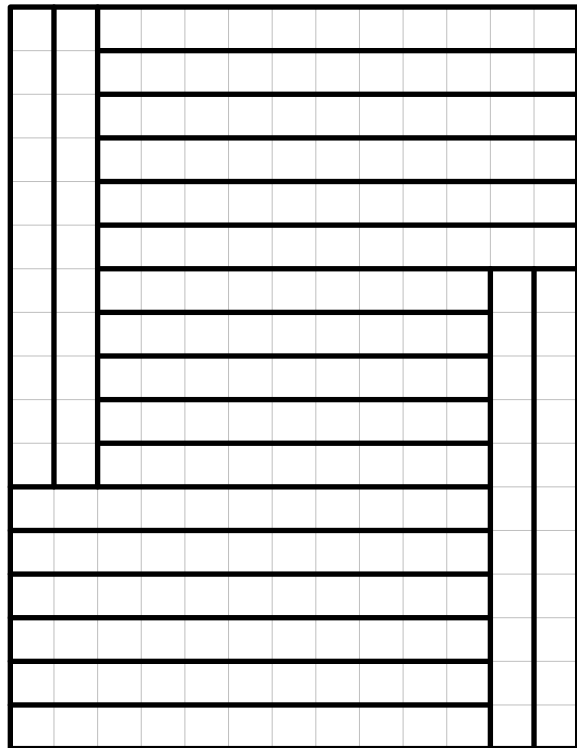
jest równoważna możliwości podziału prostopadłościanu $1 \times 13 \times 17$ na prostopadłościany $1 \times 1 \times 9$ i $1 \times 1 \times 11$.

Ponadto zauważmy, że kwadrat o boku 17 można podzielić na kwadrat o boku 9 i cztery prostokąty o wymiarach 4×13 jak na rysunku 620. W ten sposób dochodzimy do przedstawionego na rysunku 622 podziału kwadratu o boku 17 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×13 . To oznacza, że patrząc od góry na sześcian o krawędzi 17 i stosując podział kwadratu o boku 17 na prostokąty 1×9 i 1×13 otrzymujemy podział sześcianu o krawędzi 17 na prostopadłościany $1 \times 9 \times 17$ i $1 \times 13 \times 17$. Z kolei prostopadłościan o wymiarach $1 \times 9 \times 17$ daje się w oczywisty sposób podzielić na prostopadłościany $1 \times 1 \times 9$, a prostopadłościan $1 \times 13 \times 17$ umiemy już podzielić na prostopadłościany $1 \times 1 \times 9$ i $1 \times 1 \times 11$.

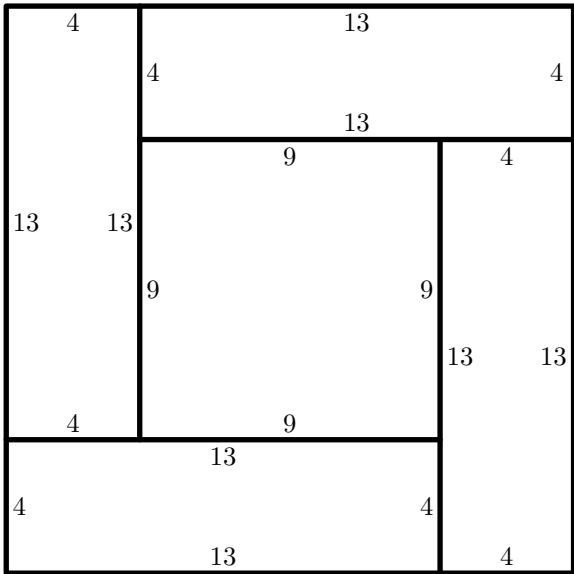
To kończy konstrukcję podziału sześciangu o krawędzi 17 na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1 \times 1 \times 9$ lub $1 \times 1 \times 11$.



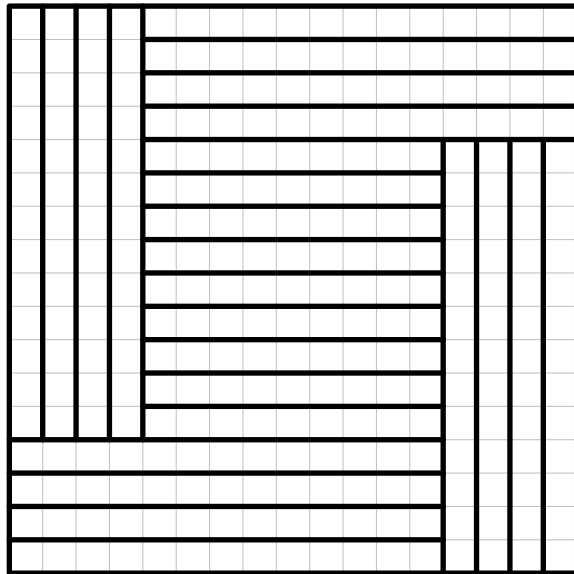
rys. 606



rys. 608



rys. 620



rys. 622

Uwaga:

Powyższe zadanie jest szczególnie interesujące w kontekście poprzedniego zadania. Okazuje się bowiem, że kwadratu o boku 17 nie można podzielić na prostokąty 1×9 i 1×11 , ale podział sześciangu o krawędzi 17 na prostopadłościany $1 \times 1 \times 9$ i $1 \times 1 \times 11$ jest możliwy.