

202. Uporządkuj następujące liczby w kolejności rosnącej:

12345678901 · 12345678911, 12345678903 · 12345678909, 12345678905 · 12345678907,
12345678902 · 12345678910, 12345678900 · 12345678912, 12345678904 · 12345678908.

204. Wyznacz wszystkie (z dokładnością do przystawania) trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej i jednej z przyprostokątnych długości 15.

206. Która liczba jest większa:

$$\sqrt{77} - \sqrt{76} \quad \text{czy} \quad \sqrt{79} - \sqrt{78} ?$$

208. Rozłóż na iloczyn czynników pierwszych liczbę $3^8 - 1$.

220. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} \right| \leq |x - y|.$$

222. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej nieparzystej n liczba n^4 daje przy dzieleniu przez 16 resztę 1.

224. Zapewne wiesz, że $3^2 + 4^2 = 5^2$. Możesz nie wiedzieć, że także $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Udowodnij, że dla czwartych potęg podobna równość nie zachodzi, albowiem dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $n^4 + (n+1)^4 + (n+2)^4 + (n+3)^4$ nie jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

226. Która liczba jest większa: $\sqrt[4]{77} - \sqrt[4]{76}$ czy $\sqrt[4]{79} - \sqrt[4]{78}$?

228. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{y^4 + 1} \right| \leq |x - y|.$$

240. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *milutką*, jeżeli da się ją przedstawić w postaci sumy (dwóch lub więcej) trzydziestych drugich potęg liczb całkowitych dodatnich, w której to sumie występuje dokładnie jeden składnik nieparzysty i co najmniej jeden składnik parzysty. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, której trzydziesta druga potęga jest *milutką*.

242. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $123^3 - 1$.

244. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $212^5 + 1$.

246. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $77^{34} - 2^{34}$.

248. Znajdź dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{15} - 1$.
260. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $36^{17} - 5^{17}$.
262. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $6^{17} + 5^{17}$.
264. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{33} - 2^{22}$.
266. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $6^{22} + 5^{22}$.
268. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $17^{26} - 2^{26}$.
280. Wskaż dzielnik pierwszy liczby $2^{21} - 1$ mniejszy od 100.
282. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{21} - 1$ mniejszy od 100.
284. Wskaż dzielnik pierwszy liczby $3^{51} - 2^{51}$ mniejszy od 100.
286. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{51} + 1$ mniejszy od 100.
288. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{35} + 1$.
400. Wskaż trzycyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{77} - 1$.
402. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{42} - 3^{21}$.
404. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{808} - 1$.
406. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{98} - 1$.
408. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{136} - 2^{136}$.
420. Która liczba jest większa:

$$\sqrt[3]{77} - \sqrt[3]{76} \quad \text{czy} \quad \sqrt[3]{79} - \sqrt[3]{78} ?$$

422. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt[6]{x^6 + 1} - \sqrt[6]{y^6 + 1} \right| \leq |x - y|.$$

424. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8n} < \sqrt{n^2 + n} - n < \frac{1}{2}.$$

426. Wyznacz wszystkie takie liczby całkowite $n > 1$, że liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

466. Udowodnij, że liczba 101010101 jest złożona.

468. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{78} - 5^{52}$.

480. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x < y$ zachodzą nierówności

$$\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} < \frac{\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3}}{y - x} < \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}{2}.$$

482. Udowodnij, że wśród liczb $3^n - 2^n$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$, jest mniej niż 500 liczb pierwszych.

484. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x < y$ zachodzą nierówności

$$\frac{3\sqrt{x^3} + 2\sqrt{y^3}}{2} < \frac{\sqrt{y^5} - \sqrt{x^5}}{y - x} < \frac{2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{y^3}}{2}.$$

486. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x < y$ oraz liczby naturalnej $n > 1$ zachodzą nierówności

$$\frac{(y-x) \cdot \sqrt[n]{y}}{ny} < \sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x} < \frac{(y-x) \cdot \sqrt[n]{x}}{nx}.$$

W kolejnych czterech zadaniach dla podanych liczb a i b udowodnij nierówności

$$\frac{1}{2m} < a - b < \frac{1}{m}$$

dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej m (być może innej w każdym z zadań).

488. $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{5}$.

600. $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[7]{5}$.

602. $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[10]{10}$.

604. $a = \sqrt[10]{10}$, $b = \sqrt[7]{5}$.