202. Uporządkuj następujące liczby w kolejności rosnącej:
$12345678901\cdot 12345678911$, $12345678903\cdot 12345678909$, $12345678905\cdot 12345678907$,
$12345678902\cdot 12345678910$, $12345678900\cdot 12345678912$, $12345678904\cdot 12345678908$.

Rozwiązanie:

Podane liczby są iloczynami postaci

$$(12345678906-k)\cdot(12345678906+k)\,,$$

gdzie $k=1,2,3,4,5,6$. Ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$(12345678906-k)\cdot(12345678906+k)=12345678906^2-k^2\,,$$

skąd wynika, że iloczyn jest tym większy, im mniejsza jest liczba k, czyli im większy jest pierwszy czynnik.

204. Wyznacz wszystkie (z dokładnością do przystawania) trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej i jednej z przyprostokątnych długości 15.

Rozwiązanie:

Oznaczając długości przyprostokątnych trójkąta przez $a=15$ i b, a długość przeciwprostokątnej przez c, otrzymujemy na mocy twierdzenia Pitagorasa $15^2+b^2=c^2$, czyli

$$225=c^2-b^2=(c-b)\cdot(c+b)\,.$$

Liczba 225 ma następujące cztery rozkłady na iloczyn dwóch liczb całkowitych dodatnich, gdzie pierwszy czynnik jest mniejszy od drugiego: $1\cdot 225$, $3\cdot 75$, $5\cdot 45$, $9\cdot 25$. Rozkłady te prowadzą odpowiednio do rozwiązań

$$b=112,\ c=113,\qquad b=36,\ c=39,\qquad b=20,\ c=25,\qquad b=8,\ c=17\,.$$

206. Która liczba jest większa:

$$\sqrt{77}-\sqrt{76}\quad\text{czy}\quad\sqrt{79}-\sqrt{78}\ ?$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b},\qquad a+b\neq 0,$$

przepisujemy podane liczby jako

$$\frac{1}{\sqrt{77}+\sqrt{76}}\quad\text{oraz}\quad\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{78}}\,.$$

Ponieważ pierwsza liczba ma mniejszy mianownik, jest ona większa.

208. Rozłóż na iloczyn czynników pierwszych liczbę 3^8-1.

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do

$$3^8-1=\left(3^4-1\right)\cdot\left(3^4+1\right)=80\cdot 82=\left(2^4\cdot 5\right)\cdot(2\cdot 41)=2^5\cdot 5\cdot 41\,.$$

220. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|=\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\,.$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\leqslant 1\,,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y|\leqslant\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\,.$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\,.$$

222. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej nieparzystej n liczba n^4 daje przy dzieleniu przez 16 resztę 1.

Rozwiązanie:

Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$n^4-1=\left(n^2+1\right)\cdot(n+1)\cdot(n-1)\,.$$

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to w powyższym iloczynie wszystkie trzy czynniki są parzyste. Ponadto dwa ostatnie czynniki są kolejnymi liczbami parzystymi, a zatem jedna z nich jest podzielna przez 4. Podsumowując, iloczyn zawiera trzy czynniki parzyste, w tym jeden czynnik podzielny przez 4. Zatem iloczyn ten jest podzielny przez 16.