606. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Rozwiązanie:

Sposób I: Zauważmy, że

$$3\pm 2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\pm 1\right)^2, \qquad \sqrt{2}\pm 1>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2=\left(3-2\sqrt{2}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(3+2\sqrt{2}\right)=8\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{8}$.

608. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2, \qquad \sqrt{2}-1>0\,,$$

$$5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2, \qquad \sqrt{3}-\sqrt{2}>0\,,$$

$$7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2, \qquad 2-\sqrt{3}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=2-1=1\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 1.

620. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Rozwiązanie:

Sposób I: Zauważmy, że

$$2\pm\sqrt{3}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=\left(2-\sqrt{3}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(2+\sqrt{3}\right)=6\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{6}$.

622. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$2-\sqrt{3}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}>0\,,$$

$$4-\sqrt{15}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}>0\,,$$

$$6-\sqrt{35}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}>0\,,$$

$$8-3\sqrt{7}=\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)=\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{2}$.