

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\ln(1 + 15x^2)} = \mathbf{2/15}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 - 3x}{\ln(1 + 15x^2)} = \mathbf{3/10}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1 - 5x}{\ln(1 + 15x^2)} = \mathbf{5/6}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1 - 6x}{\ln(1 + 15x^2)} = \mathbf{6/5}$

2. Podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{25} - \sqrt[n+2]{25} \right) = \mathbf{28}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{16} - \sqrt[n+2]{16} \right) = \mathbf{18}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{9} - \sqrt[n+2]{9} \right) = \mathbf{10}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n+2]{4} \right) = \mathbf{4}$

3. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^1 \frac{x^{79} dx}{x^{80} + 1} = \frac{\mathbf{\ln 2}}{\mathbf{80}}$

b) $\int_0^1 \frac{x^{39} dx}{x^{80} + 1} = \frac{\mathbf{\pi}}{\mathbf{160}}$

c) $\int_0^1 \frac{x^{159} dx}{x^{160} + 1} = \frac{\mathbf{\ln 2}}{\mathbf{160}}$

d) $\int_0^1 \frac{x^{79} dx}{x^{160} + 1} = \frac{\mathbf{\pi}}{\mathbf{320}}$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{21n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3kn}} = \mathbf{4}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3kn}} = \mathbf{4/3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{8n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3kn}} = \mathbf{2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{16n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3kn}} = \mathbf{10/3}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A , B , C , D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \int_{|x|+x}^{1+x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(x, y) dx dy$$

$$A = 0 \qquad B = 2 \qquad C = y - 1 \qquad D = y/2$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \int_{|x|-x}^{1-x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(x, y) dx dy$$

$$A = 0 \qquad B = 2 \qquad C = -y/2 \qquad D = 1 - y$$

$$\text{c) } \int_{-1}^1 \int_{x-1}^{x-|x|} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(x, y) dx dy$$

$$A = -2 \qquad B = 0 \qquad C = y/2 \qquad D = y + 1$$

$$\text{d) } \int_{-1}^1 \int_{-x-1}^{-x-|x|} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(x, y) dx dy$$

$$A = -2 \qquad B = 0 \qquad C = -y - 1 \qquad D = -y/2$$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^2 \cdot \bar{z}^2 = 81$.

$$\text{a) } z = \frac{5}{2} + ai, \quad a = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\text{b) } z = \frac{1}{2} + ai, \quad a = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$\text{c) } z = 2 + ai, \quad a = \sqrt{5}$$

$$\text{d) } z = 1 + ai, \quad a = 2\sqrt{2}$$

7. Dla podanej liczby λ podaj taką liczbę a , aby λ była wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 4 & a \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

a) $\lambda = 3, \quad a = \mathbf{2}$

b) $\lambda = 6, \quad a = \mathbf{2}$

c) $\lambda = 7, \quad a = \mathbf{6}$

d) $\lambda = 8, \quad a = \mathbf{12}$

8. Dla podanych liczb a i b wskaż takie liczby c, d i e , aby wektory $(0, 1, 2, 4, 8), (1, 1, 1, 1, 1)$ i (a, b, c, d, e) były liniowo zależne.

a) $a = 1, \quad b = 4, \quad c = \mathbf{7}, \quad d = \mathbf{13}, \quad e = \mathbf{25}$

b) $a = 1, \quad b = 5, \quad c = \mathbf{9}, \quad d = \mathbf{17}, \quad e = \mathbf{33}$

c) $a = 1, \quad b = 3, \quad c = \mathbf{5}, \quad d = \mathbf{9}, \quad e = \mathbf{17}$

d) $a = 2, \quad b = 12, \quad c = \mathbf{22}, \quad d = \mathbf{42}, \quad e = \mathbf{82}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 12^k . Wówczas

a) $C(3) = \mathbf{28}$

b) $C(2) = \mathbf{15}$

c) $C(5) = \mathbf{66}$

d) $C(4) = \mathbf{45}$

10. Dla podanej liczby r podaj liczbę elementów rzędu r w grupie izometrii 15-kąta foremnego.

a) $r = 2$, **15**

b) $r = 3$, **2**

c) $r = 5$, **4**

d) $r = 15$, **8**

11. Rzucamy ośmiościenną kostką do gry (mającą na ścianach kolejne liczby oczek od 1 do 8). Jeżeli wypadło mniej niż n oczek, unieważniamy pierwszy rzut i rzucamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce po zakończeniu opisanej wyżej procedury. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(6) = 87/16 = 5\frac{7}{16}$

b) $E(5) = 11/2 = 5\frac{1}{2}$

c) $E(4) = 87/16 = 5\frac{7}{16}$

d) $E(3) = 21/4 = 5\frac{1}{4}$

12. Zdarzenia losowe A i B są niezależne. Dla podanego prawdopodobieństwa $P(A \cap B)$ podaj najmniejszą możliwą wartość $P(A \cup B)$.

a) $P(A \cap B) = 1/9$, $\min P(A \cup B) = 5/9$

b) $P(A \cap B) = 1/4$, $\min P(A \cup B) = 3/4$

c) $P(A \cap B) = 1/16$, $\min P(A \cup B) = 7/16$

d) $P(A \cap B) = 4/9$, $\min P(A \cup B) = 8/9$