

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

**1.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją odwrotną do funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem  $g(x) = 2x^3 + x$ . Podaj w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji  $f$  w podanych punktach.

a)  $f'(0) = 1$

b)  $f'(3) = 1/7$

c)  $f'(18) = 1/25$

d)  $f'(57) = 1/55$

**2.** Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x) = \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{x^3}$$

dla  $x \neq 0$ . Podaj wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji  $f$  w punkcie 0.

a)  $f'''(0) = 1/120$

b)  $f''(0) = 1/60$

c)  $f'(0) = 1/24$

d)  $f(0) = 1/6$

**3.** Niech  $C(k) = \int_0^k [\sqrt[3]{x}] dx$ , gdzie  $[\cdot]$  oznacza część całkowitą. Wtedy

a)  $C(10) = 11$

b)  $C(5) = 4$

c)  $C(20) = 31$

d)  $C(15) = 21$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{7n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{9/2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{12}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{63n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{45/2}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{15/2}$$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , aby dla każdej funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_3^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/6} \qquad C = \mathbf{3/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{b) } \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/4} \qquad C = \mathbf{2/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{c) } \int_1^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/3} \qquad C = \mathbf{1/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{d) } \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/2} \qquad C = \mathbf{0} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

**6.** Podaj taką liczbę rzeczywistą  $a$ , że liczba zespolona  $z$  podanej postaci spełnia równanie  $\arg z = 2\arg(3+i)$ .

a)  $z = 1 + ai$ ,  $a = \mathbf{3/4}$

b)  $z = a + i$ ,  $a = \mathbf{4/3}$

c)  $z = 3 + ai$ ,  $a = \mathbf{9/4}$

d)  $z = a + 3i$ ,  $a = \mathbf{4}$

**7.** Niech  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Dla danego  $k$  podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy  $A^k$ .

a)  $k = 5$ ,  $\mathbf{244}$

b)  $k = 4$ ,  $\mathbf{82}$

c)  $k = 3$ ,  $\mathbf{28}$

d)  $k = 2$ ,  $\mathbf{10}$

**8.** Dla podanej jednej z liczb  $a$ ,  $b$  i  $c$  wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor  $(a, b, c)$  był prostopadły do wektorów  $(1, 1, 1)$  i  $(3, 5, 7)$ .

a)  $a = \mathbf{-1}$ ,  $b = 2$ ,  $c = \mathbf{-1}$

b)  $a = 1$ ,  $b = \mathbf{-2}$ ,  $c = \mathbf{1}$

c)  $a = 4$ ,  $b = \mathbf{-8}$ ,  $c = \mathbf{4}$

d)  $a = \mathbf{3}$ ,  $b = \mathbf{-6}$ ,  $c = \mathbf{3}$

**9.** Zbiorem elementów grupy jest przedział  $(1/2, \infty)$ , a działanie grupowe "o" jest określone wzorem  $a \circ b = a \cdot b \cdot a^{\log_2 b}$ . Dla podanego elementu  $g$  tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a)  $g = 8$ ,  $g^{-1} = \mathbf{2^{-3/4}}$

b)  $g = 1$ ,  $g^{-1} = \mathbf{1}$

c)  $g = 2$ ,  $g^{-1} = \mathbf{1/\sqrt{2}}$

d)  $g = 4$ ,  $g^{-1} = \mathbf{2^{-2/3}}$

**10.** Niech  $E(n)$  będzie liczbą elementów rzędu  $n$  w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas:

a)  $E(63) = \mathbf{36}$

b)  $E(64) = \mathbf{32}$

c)  $E(65) = \mathbf{48}$

d)  $E(66) = \mathbf{20}$

**11.** W urnie znajduje się  $3n$  kul, po  $n$  z każdego z trzech kolorów: amarantowego, białego i czarnego. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech  $P(n)$  oznacza prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule są amarantowe. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(7) = \mathbf{1/10}$

b)  $P(4) = \mathbf{1/11}$

c)  $P(3) = \mathbf{1/12}$

d)  $P(2) = \mathbf{1/15}$

**12.** Zdarzenia losowe  $A$  i  $B$  są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw  $P(A)$  i  $P(B)$  podaj  $P(A \cup B)$ .

a)  $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{13/15}$

b)  $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{11/15}$

c)  $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{14/15}$

d)  $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{13/15}$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

**1.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją odwrotną do funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem  $g(x) = 2x^3 + x$ . Podaj w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji  $f$  w podanych punktach.

a)  $f'(18) = \mathbf{1/25}$

b)  $f'(3) = \mathbf{1/7}$

c)  $f'(0) = \mathbf{1}$

d)  $f'(57) = \mathbf{1/55}$

**2.** Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x) = \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{x^3}$$

dla  $x \neq 0$ . Podaj wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji  $f$  w punkcie 0.

a)  $f(0) = \mathbf{1/6}$

b)  $f'(0) = \mathbf{1/24}$

c)  $f'''(0) = \mathbf{1/120}$

d)  $f''(0) = \mathbf{1/60}$

**3.** Niech  $C(k) = \int_0^k \left[ \sqrt[3]{x} \right] dx$ , gdzie  $[.]$  oznacza część całkowitą. Wtedy

a)  $C(20) = \mathbf{31}$

b)  $C(10) = \mathbf{11}$

c)  $C(5) = \mathbf{4}$

d)  $C(15) = \mathbf{21}$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{63n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{45/2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{12}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{7n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{9/2}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{15/2}$$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , aby dla każdej funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/2} \qquad C = \mathbf{0} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{b) } \int_1^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/3} \qquad C = \mathbf{1/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{c) } \int_3^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/6} \qquad C = \mathbf{3/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{d) } \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/4} \qquad C = \mathbf{2/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

**6.** Podaj taką liczbę rzeczywistą  $a$ , że liczba zespolona  $z$  podanej postaci spełnia równanie  $\arg z = 2\arg(3+i)$ .

a)  $z = 3 + ai, \quad a = 9/4$

b)  $z = a + i, \quad a = 4/3$

c)  $z = 1 + ai, \quad a = 3/4$

d)  $z = a + 3i, \quad a = 4$

**7.** Niech  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Dla danego  $k$  podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy  $A^k$ .

a)  $k = 2, \quad 10$

b)  $k = 3, \quad 28$

c)  $k = 5, \quad 244$

d)  $k = 4, \quad 82$

**8.** Dla podanej jednej z liczb  $a, b$  i  $c$  wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor  $(a, b, c)$  był prostopadły do wektorów  $(1, 1, 1)$  i  $(3, 5, 7)$ .

a)  $a = 4, \quad b = -8, \quad c = 4$

b)  $a = -1, \quad b = 2, \quad c = -1$

c)  $a = 1, \quad b = -2, \quad c = 1$

d)  $a = 3, \quad b = -6, \quad c = 3$

**9.** Zbiorem elementów grupy jest przedział  $(1/2, \infty)$ , a działanie grupowe "o" jest określone wzorem  $a \circ b = a \cdot b \cdot a^{\log_2 b}$ . Dla podanego elementu  $g$  tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a)  $g = 8, \quad g^{-1} = 2^{-3/4}$

b)  $g = 4, \quad g^{-1} = 2^{-2/3}$

c)  $g = 2, \quad g^{-1} = 1/\sqrt{2}$

d)  $g = 1, \quad g^{-1} = 1$

**10.** Niech  $E(n)$  będzie liczbą elementów rzędu  $n$  w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas:

a)  $E(65) = 48$

b)  $E(64) = 32$

c)  $E(63) = 36$

d)  $E(66) = 20$

**11.** W urnie znajduje się  $3n$  kul, po  $n$  z każdego z trzech kolorów: amarantowego, białego i czarnego. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech  $P(n)$  oznacza prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule są amarantowe. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(2) = 1/15$

b)  $P(3) = 1/12$

c)  $P(7) = 1/10$

d)  $P(4) = 1/11$

**12.** Zdarzenia losowe  $A$  i  $B$  są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw  $P(A)$  i  $P(B)$  podaj  $P(A \cup B)$ .

a)  $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = 14/15$

b)  $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = 13/15$

c)  $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = 11/15$

d)  $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = 13/15$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

**1.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją odwrotną do funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem  $g(x) = 2x^3 + x$ . Podaj w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji  $f$  w podanych punktach.

a)  $f'(18) = 1/25$

b)  $f'(0) = 1$

c)  $f'(57) = 1/55$

d)  $f'(3) = 1/7$

**2.** Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x) = \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{x^3}$$

dla  $x \neq 0$ . Podaj wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji  $f$  w punkcie 0.

a)  $f'''(0) = 1/120$

b)  $f'(0) = 1/24$

c)  $f(0) = 1/6$

d)  $f''(0) = 1/60$

**3.** Niech  $C(k) = \int_0^k \left[ \sqrt[3]{x} \right] dx$ , gdzie  $[.]$  oznacza część całkowitą. Wtedy

a)  $C(5) = 4$

b)  $C(10) = 11$

c)  $C(20) = 31$

d)  $C(15) = 21$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{63n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{45/2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{7n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{9/2}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{15/2}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{12}$$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , aby dla każdej funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_3^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/6} \qquad C = \mathbf{3/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{b) } \int_1^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/3} \qquad C = \mathbf{1/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{c) } \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/2} \qquad C = \mathbf{0} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{d) } \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/4} \qquad C = \mathbf{2/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

**6.** Podaj taką liczbę rzeczywistą  $a$ , że liczba zespolona  $z$  podanej postaci spełnia równanie  $\arg z = 2\arg(3+i)$ .

a)  $z = 3 + ai, \quad a = 9/4$

b)  $z = 1 + ai, \quad a = 3/4$

c)  $z = a + 3i, \quad a = 4$

d)  $z = a + i, \quad a = 4/3$

**7.** Niech  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Dla danego  $k$  podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy  $A^k$ .

a)  $k = 5, \quad 244$

b)  $k = 3, \quad 28$

c)  $k = 2, \quad 10$

d)  $k = 4, \quad 82$

**8.** Dla podanej jednej z liczb  $a, b$  i  $c$  wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor  $(a, b, c)$  był prostopadły do wektorów  $(1, 1, 1)$  i  $(3, 5, 7)$ .

a)  $a = 1, \quad b = -2, \quad c = 1$

b)  $a = -1, \quad b = 2, \quad c = -1$

c)  $a = 4, \quad b = -8, \quad c = 4$

d)  $a = 3, \quad b = -6, \quad c = 3$

**9.** Zbiorem elementów grupy jest przedział  $(1/2, \infty)$ , a działanie grupowe "o" jest określone wzorem  $a \circ b = a \cdot b \cdot a^{\log_2 b}$ . Dla podanego elementu  $g$  tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a)  $g = 8, \quad g^{-1} = 2^{-3/4}$

b)  $g = 2, \quad g^{-1} = 1/\sqrt{2}$

c)  $g = 4, \quad g^{-1} = 2^{-2/3}$

d)  $g = 1, \quad g^{-1} = 1$

**10.** Niech  $E(n)$  będzie liczbą elementów rzędu  $n$  w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas:

a)  $E(65) = 48$

b)  $E(63) = 36$

c)  $E(66) = 20$

d)  $E(64) = 32$

**11.** W urnie znajduje się  $3n$  kul, po  $n$  z każdego z trzech kolorów: amarantowego, białego i czarnego. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech  $P(n)$  oznacza prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule są amarantowe. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(7) = 1/10$

b)  $P(3) = 1/12$

c)  $P(2) = 1/15$

d)  $P(4) = 1/11$

**12.** Zdarzenia losowe  $A$  i  $B$  są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw  $P(A)$  i  $P(B)$  podaj  $P(A \cup B)$ .

a)  $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = 11/15$

b)  $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = 13/15$

c)  $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = 14/15$

d)  $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = 13/15$

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

**1.** Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją odwrotną do funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem  $g(x) = 2x^3 + x$ . Podaj w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji  $f$  w podanych punktach.

a)  $f'(0) = \mathbf{1}$

b)  $f'(57) = \mathbf{1/55}$

c)  $f'(3) = \mathbf{1/7}$

d)  $f'(18) = \mathbf{1/25}$

**2.** Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x) = \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{x^3}$$

dla  $x \neq 0$ . Podaj wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji  $f$  w punkcie 0.

a)  $f'''(0) = \mathbf{1/120}$

b)  $f(0) = \mathbf{1/6}$

c)  $f''(0) = \mathbf{1/60}$

d)  $f'(0) = \mathbf{1/24}$

**3.** Niech  $C(k) = \int_0^k \left[ \sqrt[3]{x} \right] dx$ , gdzie  $[.]$  oznacza część całkowitą. Wtedy

a)  $C(20) = \mathbf{31}$

b)  $C(10) = \mathbf{11}$

c)  $C(15) = \mathbf{21}$

d)  $C(5) = \mathbf{4}$

4. Podaj wartość granicy.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{7n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{9/2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{15/2}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{12}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{63n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \mathbf{45/2}$$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , aby dla każdej funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zachodziła podana równość.

$$\text{a) } \int_3^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/6} \qquad C = \mathbf{3/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{b) } \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/2} \qquad C = \mathbf{0} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{c) } \int_2^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/4} \qquad C = \mathbf{2/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

$$\text{d) } \int_1^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

$$A = \mathbf{0} \qquad B = \mathbf{\pi/3} \qquad C = \mathbf{1/\cos \varphi} \qquad D = \mathbf{4 \cos \varphi}$$

**6.** Podaj taką liczbę rzeczywistą  $a$ , że liczba zespolona  $z$  podanej postaci spełnia równanie  $\arg z = 2\arg(3+i)$ .

a)  $z = 1 + ai, \quad a = \mathbf{3/4}$

b)  $z = a + 3i, \quad a = \mathbf{4}$

c)  $z = a + i, \quad a = \mathbf{4/3}$

d)  $z = 3 + ai, \quad a = \mathbf{9/4}$

**7.** Niech  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Dla danego  $k$  podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy  $A^k$ .

a)  $k = 5, \quad \mathbf{244}$

b)  $k = 2, \quad \mathbf{10}$

c)  $k = 4, \quad \mathbf{82}$

d)  $k = 3, \quad \mathbf{28}$

**8.** Dla podanej jednej z liczb  $a, b$  i  $c$  wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor  $(a, b, c)$  był prostopadły do wektorów  $(1, 1, 1)$  i  $(3, 5, 7)$ .

a)  $a = 4, \quad b = -8, \quad c = \mathbf{4}$

b)  $a = -1, \quad b = 2, \quad c = -1$

c)  $a = \mathbf{3}, \quad b = -6, \quad c = 3$

d)  $a = 1, \quad b = -2, \quad c = \mathbf{1}$

**9.** Zbiorem elementów grupy jest przedział  $(1/2, \infty)$ , a działanie grupowe "o" jest określone wzorem  $a \circ b = a \cdot b \cdot a^{\log_2 b}$ . Dla podanego elementu  $g$  tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a)  $g = 8, \quad g^{-1} = \mathbf{2^{-3/4}}$

b)  $g = 4, \quad g^{-1} = \mathbf{2^{-2/3}}$

c)  $g = 1, \quad g^{-1} = \mathbf{1}$

d)  $g = 2, \quad g^{-1} = \mathbf{1/\sqrt{2}}$

**10.** Niech  $E(n)$  będzie liczbą elementów rzędu  $n$  w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas:

a)  $E(63) = \mathbf{36}$

b)  $E(66) = \mathbf{20}$

c)  $E(64) = \mathbf{32}$

d)  $E(65) = \mathbf{48}$

**11.** W urnie znajduje się  $3n$  kul, po  $n$  z każdego z trzech kolorów: amarantowego, białego i czarnego. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech  $P(n)$  oznacza prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule są amarantowe. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a)  $P(7) = \mathbf{1/10}$

b)  $P(2) = \mathbf{1/15}$

c)  $P(4) = \mathbf{1/11}$

d)  $P(3) = \mathbf{1/12}$

**12.** Zdarzenia losowe  $A$  i  $B$  są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw  $P(A)$  i  $P(B)$  podaj  $P(A \cup B)$ .

a)  $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{14/15}$

b)  $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{13/15}$

c)  $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{13/15}$

d)  $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = \mathbf{11/15}$