

Zadanie 1. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{5x^4 + 1}.$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3 \cdot |x - y|}{2}.$$

Zadanie 2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = 6x + 3y + |x - 2y|$$

na okręgu

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Wyznacz wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie 3. Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$x''(t) - x(t) = -2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Zadanie 4. Niech A i B będą takimi macierzami rozmiaru 7×7 o wyrazach rzeczywistych, że λ jest wartością własną macierzy AB . Udowodnij, że λ jest też wartością własną macierzy BA , jeżeli

a) $\lambda = 0$. (10 punktów)

b) $\lambda = 7$. (10 punktów)

Zadanie 5. Podaj (wraz z uzasadnieniem poprawności) przykład takiego skończonego pierścienia R , przemiennego z jedynką różną od zera, oraz takiego jego podpierścienia P (niekoniecznie mającego jedynkę), że P nie jest ideałem pierścienia R .

Jeśli nie potrafisz podać przykładu pierścienia skończonego, możesz podać przykład z pierścieniem nieskończonym (**za 10 punktów**).

Zadanie 6. Zawodnik bierze udział w teleturnieju. Prowadzący kładzie na stole 9 zaklejonych kopert i informuje, że w 8 kopertach znajdują się pieniądze, po 100 złotych w każdej, a dziewiąta koperta zawiera kartkę z napisem **20%**.

Zawodnik deklaruje, ile kopert chce wylosować (od 0 do 9). Następnie losuje tyle kopert, ile zadeklarował. Jeżeli we wszystkich wylosowanych kopertach będą znajdować się pieniądze, to pieniądze z wylosowanych kopert staną się wygraną zawodnika. Jeśli wśród wylosowanych kopert znajdzie się koperta z kartką **20%**, zawodnik wygra jedną piątą pieniędzy znajdujących się w wylosowanych kopertach.

Ile kopert powinien wylosować zawodnik, aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną swojej wygranej?