

Zadanie 1. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność

$$\sin x > \frac{3x}{2\pi} + \frac{1}{4}.$$

Zadanie 2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = 3x + 4y + 12z$$

na sferze

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Wyznacz wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie 3. Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$x''(t) + x(t) = -2e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Zadanie 4. Niech A będzie macierzą rozmiaru 7×7 o wyrazach rzeczywistych i niech I będzie macierzą jednostkową tego samego rozmiaru. Udowodnij, że co najmniej jedna z macierzy $A + nI$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, jest odwracalna.

Zadanie 5. Rozstrzygnij, czy w grupie izometrii własnych czworościanu foremnego istnieje...

a) element rzędu 3. **(10 punktów)**

b) element rzędu 4. **(10 punktów)**

Zadanie 6. Przy rzucie *pamiętliwą* monetą, począwszy od drugiego rzutu z prawdopodobieństwem $2/3$ wypada to samo, co w poprzednim rzucie (np. w piątym rzucie z prawdopodobieństwem $2/3$ wypada to samo, co wypadło w czwartym rzucie). Wykonano n rzutów pamiętliwą monetą. Okazało się, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo $P(n)$, że w n -tym rzucie też wypadł orzeł?

Jeśli nie potrafisz podać pełnego rozwiązania, wyznacz (wraz z uzasadnieniem) $P(n)$ dla $n = 3, 4, 5, 6$ (po **1 punkcie** za każdy z tych czterech przypadków) oraz zgadnij (bez uzasadnienia) wzór na $P(n)$ – za **4 punkty**. Łącznie możesz zdobyć w ten sposób **8 punktów**.