

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $g(x) = 2x^3 + x$. Podaj w postaci uproszczonej wartości pochodnej funkcji f w podanych punktach.

a) $f'(0) = \dots\dots\dots$

b) $f'(3) = \dots\dots\dots$

c) $f'(18) = \dots\dots\dots$

d) $f'(57) = \dots\dots\dots$

2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą określoną wzorem

$$f(x) = \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{x^3}$$

dla $x \neq 0$. Podaj wartość funkcji oraz wartości pochodnych podanych rzędów funkcji f w punkcie 0.

a) $f'''(0) = \dots\dots\dots$

b) $f''(0) = \dots\dots\dots$

c) $f'(0) = \dots\dots\dots$

d) $f(0) = \dots\dots\dots$

3. Niech $C(k) = \int_0^k [\sqrt[3]{x}] \, dx$, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą. Wtedy

a) $C(10) = \dots\dots\dots$

b) $C(5) = \dots\dots\dots$

c) $C(20) = \dots\dots\dots$

d) $C(15) = \dots\dots\dots$

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{7n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{63n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=7n+1}^{26n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + kn^2}} = \dots\dots\dots$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A , B , C , D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int_3^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

b) $\int_2^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

c) $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

d) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

6. Podaj taką liczbę rzeczywistą a , że liczba zespolona z podanej postaci spełnia równanie $\arg z = 2\arg(3+i)$.

a) $z = 1 + ai$, $a = \dots\dots\dots$

b) $z = a + i$, $a = \dots\dots\dots$

c) $z = 3 + ai$, $a = \dots\dots\dots$

d) $z = a + 3i$, $a = \dots\dots\dots$

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dla danego k podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy A^k .

a) $k = 5$, $\dots\dots\dots$

b) $k = 4$, $\dots\dots\dots$

c) $k = 3$, $\dots\dots\dots$

d) $k = 2$, $\dots\dots\dots$

8. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(1, 1, 1)$ i $(3, 5, 7)$.

a) $a = \dots\dots\dots$, $b = 2$, $c = \dots\dots\dots$

b) $a = 1$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

c) $a = 4$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

d) $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = 3$

9. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(1/2, \infty)$, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem $a \circ b = a \cdot b \cdot a^{\log_2 b}$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 8$, $g^{-1} = \dots\dots\dots$

b) $g = 1$, $g^{-1} = \dots\dots\dots$

c) $g = 2$, $g^{-1} = \dots\dots\dots$

d) $g = 4$, $g^{-1} = \dots\dots\dots$

10. Niech $E(n)$ będzie liczbą elementów rzędu n w grupie niezerowych liczb zespolonych z mnożeniem. Wówczas:

a) $E(63) = \dots\dots\dots$

b) $E(64) = \dots\dots\dots$

c) $E(65) = \dots\dots\dots$

d) $E(66) = \dots\dots\dots$

11. W urnie znajduje się $3n$ kul, po n z każdego z trzech kolorów: amarantowego, białego i czarnego. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule są amarantowe. Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(7) = \dots\dots\dots$

b) $P(4) = \dots\dots\dots$

c) $P(3) = \dots\dots\dots$

d) $P(2) = \dots\dots\dots$

12. Zdarzenia losowe A i B są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A)$ i $P(B)$ podaj $P(A \cup B)$.

a) $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = \dots\dots\dots$

b) $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 3/5, \quad P(A \cup B) = \dots\dots\dots$

c) $P(A) = 2/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = \dots\dots\dots$

d) $P(A) = 1/3, \quad P(B) = 4/5, \quad P(A \cup B) = \dots\dots\dots$