

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (p^2 - 1)^n$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^3 - 1)^n}{\sqrt{n}}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^4 - 1)^n}{n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^6 - 1)^n}{n^2}$,

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + 3k^2} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + 3k^2} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + 2k^2} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + 2k^2} = \dots\dots\dots$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{x^7 + x^3} dx$,

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{x^6 + x^2} dx$,

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{x^9 + x^5} dx$,

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{x^8 + x^4} dx$,

4. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{37} \cdot e^{x^{10}}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(107)}(0) = \dots\dots\dots$

b) $f^{(117)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(127)}(0) = \dots\dots\dots$

d) $f^{(137)}(0) = \dots\dots\dots$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A , B , C , D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int_0^3 \int_{x\sqrt{x}}^{\sqrt{3}\cdot x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

b) $\int_0^3 \int_0^{x\sqrt{x}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

c) $\int_0^1 \int_{x\sqrt{x}}^x f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

d) $\int_0^1 \int_0^{x\sqrt{x}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$ $D = \dots\dots\dots$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z \cdot \bar{z} = 65$.

a) $z = 1 + ai$, $a = \dots\dots\dots$

b) $z = 4 + ai$, $a = \dots\dots\dots$

c) $z = 7 + ai$, $a = \dots\dots\dots$

d) $z = 8 + ai$, $a = \dots\dots\dots$

7. Dla podanych liczb a i b wypisz w kolejności niemalejącej wartości własne (z uwzględnieniem krotności) macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & b \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) $a = 3$, $b = 3$, $\dots\dots\dots$

b) $a = 3$, $b = 1$, $\dots\dots\dots$

c) $a = 1$, $b = 3$, $\dots\dots\dots$

d) $a = 1$, $b = 1$, $\dots\dots\dots$

8. Niech $A = (0, 0)$ i $B = (1, 3)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC .

a) $C = (3, 4)$, $P_{ABC} = \dots\dots\dots$

b) $C = (0, 5)$, $P_{ABC} = \dots\dots\dots$

c) $C = (5, 0)$, $P_{ABC} = \dots\dots\dots$

d) $C = (4, 3)$, $P_{ABC} = \dots\dots\dots$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 18^k i niezawierających liczby 18. Wówczas

a) $C(6) = \dots\dots\dots$

b) $C(3) = \dots\dots\dots$

c) $C(4) = \dots\dots\dots$

d) $C(5) = \dots\dots\dots$

10. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(-2, \infty)$, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

- a) $g = 0$, $g^{-1} = \dots\dots\dots$ b) $g = 1$, $g^{-1} = \dots\dots\dots$
 c) $g = 2$, $g^{-1} = \dots\dots\dots$ d) $g = 3$, $g^{-1} = \dots\dots\dots$

11. W urnie znajduje się 10 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 10. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n . Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

- a) $P(11) = \dots\dots\dots$ b) $P(15) = \dots\dots\dots$
 c) $P(16) = \dots\dots\dots$ d) $P(19) = \dots\dots\dots$

12. Zdarzenia losowe A , B , C i D są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ i $P(C \cap D)$ podaj $P(A \cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A , B , C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

- a) $P(A \cap B) = 1/2$, $P(B \cap C) = 2/3$, $P(C \cap D) = 3/4$,
 $P(A \cap D) = \dots\dots\dots$
 b) $P(A \cap B) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$, $P(C \cap D) = 1/4$,
 $P(A \cap D) = \dots\dots\dots$
 c) $P(A \cap B) = 1/2$, $P(B \cap C) = 2/3$, $P(C \cap D) = 1/4$,
 $P(A \cap D) = \dots\dots\dots$
 d) $P(A \cap B) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$, $P(C \cap D) = 3/4$,
 $P(A \cap D) = \dots\dots\dots$