

9. Funkcje trygonometryczne. Elementy geometrii: twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie cosinusów, twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym, okrąg wpisany i opisany na wielokącie, wielokąty foremne (dokończenie).

7 marca 2009 r.

133. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC . Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C , że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB ?$$

*Rozwiązanie:***Odpowiedź: 3.**

Z równości kątów wynika, że punkt D leży na tym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC , który zawiera punkt C lub na odbiciu symetrycznym tegoż łuku względem prostej AB (zrób rysunek w przypadku, gdy łuk jest większy od półokręgu). Figura będąca sumą tych dwóch łuków ma z prostą prostopadłą do prostej AB co najwyżej 4 punkty wspólne.

10. Elementy kombinatoryki geometrycznej: suma kątów wielokąta, liczba przekątnych wielokąta, porównywanie pól wielokątów w oparciu o proste zależności geometryczne jak np. przystawanie i zawieranie, rozpoznawanie przystających konfiguracji geometrycznych.

134. Dla której liczby naturalnej n w dowolnym n -kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków, jeżeli

- a) $k = 2$
- b) $k = 3$
- c) $k = 5$
- d) $k = 10$

Rozwiązanie:

Liczba przekątnych w n -kącie wypukłym jest równa $n(n-3)/2$, skąd otrzymujemy

$$k = \frac{n-3}{2},$$

czyli

$$n = 2k + 3.$$

W konsekwencji otrzymujemy następujące odpowiedzi

- a) $k = 2, n = 7$
- b) $k = 3, n = 9$
- c) $k = 5, n = 13$
- d) $k = 10, n = 23$

135. Dla których liczb naturalnych n istnieje n -kąt wypukły, którego każdy kąt wewnętrzny ma miarę 60° lub 160° ?

Rozwiązanie:

Suma miar kątów wewnętrznych n -kąta jest równa $(n-2) \cdot 180^\circ$. Załóżmy, że wielokąt ma k kątów równych 60° i $n-k$ kątów równych 160° . Wówczas porównanie sumy kątów prowadzi do równania

$$180(n-2) = 60k + 160(n-k),$$

co daje kolejno

$$180n - 360 = 160n - 100k$$

$$20n + 100k = 360.$$

Pamiętajmy przy tym, że $0 \leq k \leq n$. Przy tym ograniczeniu powyższe równanie jest spełnione przez 4 pary (n, k) : $(3, 3)$, $(8, 2)$, $(13, 1)$, $(18, 0)$. Nietrudno stwierdzić, że w każdym przypadku istnieje wielokąt o zadanych kątach.

Odpowiedź: Dla $n=3, 8, 13$ i 18 .

136. Dziewięciokąt $A_1A_2A_3 \dots A_9$ jest foremny. Wyznaczyć miary kątów trójkąta

- a) $A_1A_3A_7$
- b) $A_2A_3A_8$
- c) $A_3A_4A_5$

Odpowiedź:

- a) kąty przy wierzchołkach A_1, A_3, A_7 mają miary odpowiednio $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$
- b) kąty przy wierzchołkach A_2, A_3, A_8 mają miary odpowiednio $100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$
- c) kąty przy wierzchołkach A_3, A_4, A_5 mają miary odpowiednio $20^\circ, 140^\circ, 20^\circ$

137. Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.

- a) A_1A_7, A_3A_9
- b) A_1A_5, A_2A_8
- c) A_1A_5, A_3A_7
- d) A_1A_6, A_4A_9

Odpowiedź:

- a) $A_kA_{k+6}, k=2, 4, 5, 6$
- b) A_3A_{11}
- c) A_4A_{10}
- d) A_5A_{11}

138. Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających

- a) $A_1A_2A_4A_9$
- b) $A_1A_3A_7A_{11}$

c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$ d) $A_1A_6A_9A_{10}$ e) $A_1A_4A_6A_{11}$ f) $A_1A_2A_3A_9$ g) $A_1A_6A_8A_{11}$ h) $A_1A_3A_4A_8$

Które czworokąty mają równe pola?

Odpowiedź: Pary czworokątów przystających to:

a) - d)

b) - h)

c) - f)

e) - g)

Równe pola mają ponadto a), d), e), g).

139. Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{13}$. Dla podanych i, j wskazać taką liczbę k , że trójkąt $A_iA_jA_k$ jest trójkątem równoramiennym ostrokątnyma) $i = 1, j = 2$ b) $i = 1, j = 5$ c) $i = 1, j = 6$ d) $i = 1, j = 7$ *Odpowiedź:*a) $i = 1, j = 2, k = 8$ b) $i = 1, j = 5, k = 9$ (lub $k = 10$)c) $i = 1, j = 6, k = 9$ (lub $k = 10$ lub $k = 11$)d) $i = 1, j = 7, k = 8$ (lub $k = 13$)**140.** Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości od jego boków?*Odpowiedź:* Każdy ma taką samą.**141.** Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?*Odpowiedź:* Środek ciężkości.**142.** Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego boków?*Odpowiedź:* Każdy ma taką samą.**143.** Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?*Odpowiedź:* Punkt przecięcia przekątnych.

144. W wierzchołkach kwadratu o boku 1 km znajdują się 4 domy. Czy można zbudować sieć dróg o łącznej długości mniejszej od $2\sqrt{2}$ km, umożliwiającą dojście z każdego domu do każdego innego?

Odpowiedź: Tak. Można zbudować sieć dróg o łącznej długości równej $1 + \sqrt{3}$ km.

W tym celu zamiast narzucającego się połączenia domów ze środkiem kwadratu, należy utworzyć dwa rozwidlenia. Z każdego z nich powinny wychodzić 3 drogi tworzące kąty 120° . Dwie z tych dróg powinny prowadzić do dwóch sąsiednich wierzchołków kwadratu, a trzecia do drugiego rozwidlenia.

145. Obliczyć pole sześciokąta foremnego o boku 1.

Odpowiedź: Ponieważ sześciokąt foremny można zbudować z 6 trójkątów równobocznych o boku 1, a pole każdego trójkąta jest równe $\sqrt{3}/4$, otrzymujemy

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

146. Obliczyć pole dwunastokąta foremnego o boku 1.

Odpowiedź: Na każdym boku sześciokąta foremnego zbudujmy kwadrat. Łącząc odpowiednie wierzchołki kwadratów otrzymamy dwunastokąt foremny zbudowany z sześciokąta foremnego, 6 kwadratów i 6 trójkątów równobocznych. Zatem pole dwunastokąta jest równe

$$6 + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 6 + 3\sqrt{3}.$$

147. W 101-kącie foremnym pomalowano na czerwono dowolne 52 wierzchołki. Dowieść, że istnieje trójkąt równoramienny, którego wszystkie wierzchołki są czerwone.

Rozwiązanie:

Wybermy dowolny czerwony wierzchołek i poprowadźmy przez niego prostą zawierającą średnicę okręgu opisanego na 101-kącie. Wówczas pozostałych 100 wierzchołków 101-kąta tworzy 50 par wierzchołków symetrycznych względem tej prostej. Wśród tych wierzchołków, 51 jest czerwonych, istnieje więc co najmniej jedna para złożona z dwóch czerwonych wierzchołków. Para ta w połączeniu z wierzchołkiem wybranym na początku, wyznacza trójkąt równoramienny spełniający warunki zadania.

11. Zadanie na pożegnanie.

148. Czy wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ oraz $g(x) = x^{20} + 4$ się przecinają?

Rozwiązanie:

Nietrudno ustalić, że w pobliżu zera wykresy się nie przecinają, a przy tym $f(x) < g(x)$ dla x niezbyt odległych od zera.

Pierwsza myśl: Funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż funkcja wielomianowa, zatem wartości funkcji f powinny dla dużych x przewyższyć wartości funkcji g . Stąd wynika, że wykresy się przetną. Dla pełnej precyzji matematycznej wypadałoby w tym miejscu skorzystać z własności Darboux funkcji ciągłych, jednak możemy ten element potraktować bardziej intuicyjnie.

Doprecyzowanie: Spróbujmy porównać wartości funkcji f i g dla konkretnych wartości argumentu. Ze względu na postać funkcji f najlepiej do tego celu nadają się potęgi dwójki.

I tak dla $x = 128$ otrzymujemy

$$f(128) = 2^{128}$$

oraz

$$g(128) = 2^{140} + 4,$$

skąd

$$f(128) < g(128).$$

Dla $x = 256$ otrzymujemy

$$f(256) = 2^{256}$$

oraz

$$g(256) = 2^{160} + 4,$$

skąd

$$f(256) > g(256).$$

Zatem wykresy funkcji f i g przecinają się - punkt przecięcia odpowiada pewnemu argumentowi z przedziału $(128, 256)$.

Refleksja: Dla $x = 128$ wykres funkcji wielomianowej jest jeszcze powyżej wykresu funkcji potęgowej. Przy tym

$$f(128) = 2^{128} \approx 3,4 \cdot 10^{38}.$$

Gdzie znajduje się punkt wykresu funkcji f odpowiadający $x = 128$?

Przyjmując za jednostkę na osiach 1 cm oraz zakładając rozmiar wszechświata rzędu 10^{28} cm, stwierdzamy, że ten punkt znajduje się kilkadziesiąt miliardów wszechświatów dalej. Wykresy funkcji f i g już dawno opuściły nasz wszechświat, a jeszcze daleko im do przecięcia!

Sytuacji nie uratuje nawet przyjęcie na osiach jednostki równej średnicy elektronu (rzędu wielkości 10^{-13} cm). Wykresy funkcji f i g nadal nie przecinają się w obrębie naszego wszechświata.

Czy możemy więc jednoznacznie odpowiedzieć na pytanie postawione w treści zadania?

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>